

双层插值边界面法研究进展¹⁾

张见明²⁾ 肖榕雄 柴朋飞 张冲 朱腾飞 王龙豪

(湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 长沙 410082)

摘要 CAD/CAE 一体化以及 CAE 分析的自动化是 CAE 软件发展的必然趋势, 一直以来也是众多软件开发商以及算法研究人员不断追寻的目标. 尽管国际市场已经在该领域投入相当多的人力以及物力成本, 却未能在关键技术方面给出彻底的解决方案. 实现 CAD/CAE 一体化以及 CAE 分析自动化的关键在于完整实体分析与网格的全自动划分. 以往, 基于连续网格 (结构化网格和非结构化网格) 的数值算法, 要做到网格的全自动划分, 至少要求 CAD 模型“干净”, 这往往需要对 CAD 模型进行几何修复, 而几何修复又是一个甚至比网格划分更困难且更难以自动化的课题. 而双层插值边界面法以及非连续网格的出现, 使得 CAD/CAE 一体化以及 CAE 分析的自动化成为可能. 非连续网格能够有效地实现自动化的 CAE 分析; 双层插值边界面法为非连续网格的应用以及 CAD/CAE 一体化的实现提供了理论支持. 对于边界积分方程中的奇异以及近奇异积分, 提出了球面细分法来提升数值积分的准确性以及稳定性. 几何映射交叉近似算法和几何交叉近似算法, 能够有效地降低稠密矩阵的存储量近似远场矩阵, 满足大规模计算需要. 基于以上理论的“5aCAE 仿真软件”能够直接在原 CAD 模型上, 采用非连续网格进行 CAE 分析, 无需进行几何模型的简化与修复等工作, 而现存的商业软件很难做到这一点. 文章全面综述了双层插值边界面法的发展历程, 系统地介绍了“5aCAE 仿真软件”的技术亮点, 为解决我国在 CAE 领域的“卡脖子”问题提供了技术支持.

关键词 CAD/CAE 一体化, 自动化 CAE, 双层插值边界面法, 非连续网格

中图分类号: O34 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-23-450

ADVANCE ON DUAL INTERPOLATION BOUNDARY FACE METHOD¹⁾

Zhang Jianming²⁾ Xiao Rongxiong Chai Pengfei Zhang Chong Zhu Tengfei Wang Longhao

(State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract CAD/CAE integration and automatic CAE are the inevitable tendency for future development of CAE software and have been the target for a number of software developers and algorithm researchers. Although a considerable amount of manpower and material costs has been invested in this field, it has failed to provide real solutions to crucial issues. The key to CAD/CAE integration and automatic CAE analysis lies in the automatic mesh division and complete entity analysis. Previous algorithms based on continuous meshes (the structured and unstructured meshes) required at least a "clean" CAD model to achieve automatic mesh generation, often requiring geometric repair, which is even more difficult to automate than mesh generation. However, the appearance of the dual interpolation boundary face method and discontinuous mesh makes it possible for CAD/CAE integration and automatic CAE analysis. Discontinuous mesh can effectively promote automatic CAE analysis development, while the dual interpolation boundary face provides

2023-09-14 收稿, 2023-12-26 录用, 2023-12-27 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (12172126 和 11972010).

2) 通讯作者: 张见明, 教授, 主要研究方向为计算力学、边界元法. E-mail: zhangjm@hnu.edu.cn

引用格式: 张见明, 肖榕雄, 柴朋飞, 张冲, 朱腾飞, 王龙豪. 双层插值边界面法研究进展. 力学学报, 2024, 56(5): 1187-1210

Zhang Jianming, Xiao Rongxiong, Chai Pengfei, Zhang Chong, Zhu Tengfei, Wang Longhao. Advance on dual interpolation boundary face method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(5): 1187-1210

theoretical support for the application of discontinuous mesh and the realization of CAD/CAE integration. A spherical subdivision method is proposed to improve the accuracy and stability of singular and near-singular integrals in boundary integral equation (BIE). Geometric mapping cross approximation algorithm and geometric cross approximation algorithm can reduce the storage of the dense coefficient matrix effectively and approximate the far-field matrix for large-scale computation. "5aCAE simulation software" based on the above theories can directly carry out CAE analysis on the CAD model using discontinuous mesh without geometric simplifying and repairing, which is difficult for existing commercial software. This paper presents a comprehensive overview of the dual interpolation boundary surface method and introduces the highlights of "5aCAE simulation software", which can provide technical support for national CAE software development.

Key words CAD/CAE integration, automatic CAE, dual interpolation boundary face method, discontinuous mesh

引言

以有限元 (finite element method, FEM) 为基础的国际商业软件如 Ansys, Abaqus, 在国内外 CAE 软件市场上已占据绝对的垄断优势. 这些软件的发展已经相对成熟, 通过几十年的技术积累与产品迭代, 功能已日臻完善. 通过长期的产业布局, 这些 FEM 软件已经渗透到我国国民经济的支柱性产业, 如国防、军工、民用制造业以及建筑业等领域, 事关国家信息安全与产业发展主动权. 因此, 发展具有自主知识产权的 CAE 分析软件, 是提升我国制造业国际地位和自主创新能力的关键. 通常来说, 企业中的产品设计师与分析师分别履行不同的职能, 设计师设计出的 CAD 模型并不能直接被 CAE 分析师拿来进行分析, 通常要进行模型简化或几何修复等工作, 而这些工作需要分析师具有丰富的经验以及掌握相应的力学知识. 除此之外, 当前市场上发行的 FEM 软件, 操作复杂, 企业需要对 CAE 从业者进行专业的培训, 不仅增加了人力成本, 而且无形中使用者提高了门槛. 因此, 对一款 CAE 分析软件来说, 兼具 CAE 分析自动化、CAE/CAD 一体化的功能, 能有效扩大其在工程领域的受众范围, 减少企业的人力成本, 增强其在工程设计中的实际影响力. 对于水平相对落后的国内 CAE 软件来说, 实现 CAD/CAE 一体化和 CAE 分析自动化, 无疑将是 CAE 分析工具的一次重大变革, 也是我国实现该领域创新的“破局之路”.

当前市面上流行的 CAE 软件自动化程度并不高, 多半原因是受前处理网格划分的限制. 据统计, 采用 FEM 软件分析工程问题时, 大约全部分析时间的 60%~80% 是用于网格划分及划分前的几何模型

准备等工作, 而多数工作牵涉到人工干预, 这是制约 FEM 软件自动化的第一个因素. 其次, 有限元软件拥有丰富的单元库, 其中又包含许多抽象单元, 比如梁单元、杆单元以及壳单元等, 而抽象单元的使用会严重阻碍 CAE 分析的自动化. 对于如图 1 所示的钢架结构, 当采用梁单元进行模型简化时, 会使得简化后的梁单元模型无论在几何还是在拓扑上与真实的钢架模型都存在较大的差别, 根本无法准确模拟结构关键部位的应力集中现象. 最后, 从理论层面来说, 有限元方程是在原控制微分方程弱形式的基础上通过一次分部积分得到, 方程中包含对试函数的一阶导数, 因此要求试函数至少是 $C0$ 连续的, 这就造成了有限元软件必须采用连续网格进行计算. 当前通常采用的连续网格包括结构化网格和非结构化网格, 两种网格分别具备不同的优点: 结构化网格的计算精度最高, 但获得它的代价大, 自动划分困难, 对于含有“几何噪音”的 CAD 模型, 其自动划分几乎不可能. 非结构化网格是目前最常采用的一种网格, 它既能保证一定的精度, 自动划分也相对容易, 但是要得到高质量的网格, 对 CAD 模型“干净”度要求较高, 对于如图 2 所示含有极短边和极窄面的钢架焊

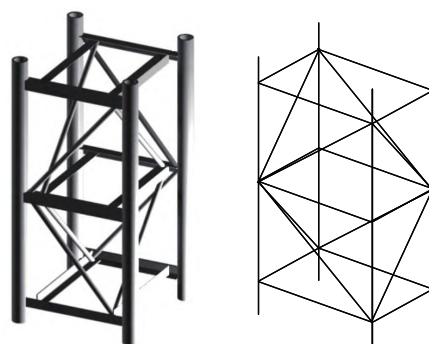


图 1 刚架及其梁单元模型

Fig. 1 Rigid frame and its beam element

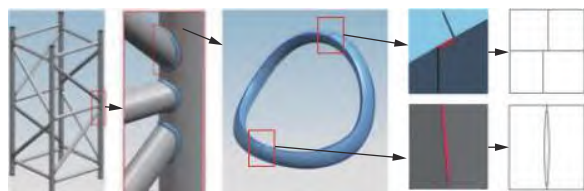


图 2 CAD 几何模型的“噪音”

Fig. 2 The geometric noise of CAD models

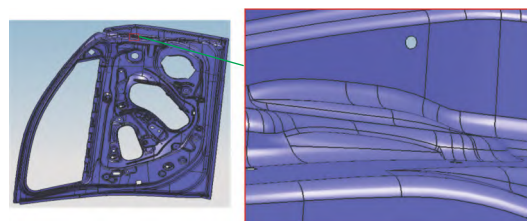


图 3 某汽车车门几何造型

Fig. 3 Geometric modeling of a car door

缝模型, 必须进行几何修复, 才能保证网格的自动生成. 而几何修复又是一个甚至比网格划分更困难且更难以自动化的课题.

基于等参元的有限元法, 几何数据以及物理场通常采用同一套插值形函数进行近似, 造成了 CAD 模型与 CAE 模型互相独立, 不可避免地会导致网格生成、自适应网格细分的困难和几何误差对计算结果的影响. 为了克服这些影响, 学术界掀起了等几何分析^[1]的研究热潮. 等几何分析采用相同的 NURBS 函数表达几何结构和近似物理场, 统一了两者模型. 基于 T-splines 的等几何分析, 避免了曲面相交处的缝隙或重叠带来的网格生成困难, 但是等几何分析仍然无法迈过几何修复这一道坎, 对于如图 3 所示的车门模型, 由于存在众多极不规则的裁剪面, 使得等几何分析无法直接进行. 因此, 等几何分析方法并不能真正实现 CAE/CAD 一体化. 基于边界积分方程 (boundary integral equation, BIE) 的边界元法^[2-10] (boundary element method, BEM) 是在有限元方程“弱”形式的基础上再次应用散度定理而得到的, 所以 BIE 中不包含试函数的微分算子, 因此没有对试函数提出连续性的要求, 进而对网格的连续性也没有提出要求. 而传统的边界元法继承了有限元等参元的思想, 同时在网格上仍然沿用有限元的连续网格, 并没有充分的利用边界元法的潜在优势, 因此, 在实现 CAE 网格的自动化方面仍然存在一定的技术阻碍. 为解决边界元法在网格自动化方面存在的缺陷, 一些学者在无网格方面投入了大量研究^[11-12], 但是为了控制节点的疏密度, 大多数的无网格法仍然要基于背景网格获得节点, 即违背了所谓“真正的”无网格法; 况且, 无论是在计算效率还是计算稳定性和收敛性等方面, 基于网格的函数插值都远远优于基于散乱点的函数近似.

“几何噪音”是阻碍网格成功划分的一项重要因素, 进而会影响 CAE 软件的自动化进程. 由于基本

解的存在, 这些小特征处 (短边和窄面) 通常会带来奇异以及近奇异积分问题. 在边界元近几十年的研究历史中, 几乎一半是关于奇异和近奇异积分的研究. 奇异积分包括弱奇异积分^[13]、强奇异积分^[14]、超奇异积分^[15]等; 近奇异积分则根据源点位置的不同分为单元外^[16] (源点距离单元很近) 和单元上^[17] (源点位于单元上而基本解接近奇异) 两种情况. 人们对这些奇异积分都进行了深入研究, 提出了各种各样分解或变换方法^[18-33], 取得了良好的效果. 然而, 实际工程结构往往非常复杂, 并不能同时充分发挥边界积分方程中物理场近似函数无需连续的特性, 并降低网格划分的困难. 对于复杂的几何模型, 离散单元的形状可能极不规则 (细长的和弯曲的), 针对这些形状不规则的单元, 现有的奇异和近奇异积分方法常常失效. 若能找到一个对任意基本解类型、任意单元形状、任意源点位置, 都能高精度高效地计算奇异和近奇异积分的解决方案, 将有望使边界元法在发挥其优点的同时, 降低对网格的要求.

除此之外, 由于系数矩阵的满秩非对称特性, 使得边界元法的求解效率偏低. 对于求解具有 N 个节点自由度的问题, 存储这些积分数据得到的系数矩阵, 需要的内存约为 $O(N^2)$, 若使用像 Gauss 消去或矩阵三角分解等的直接求解技术, 将会使处理同等规模问题时的计算量达到 $O(N^3)$, 即便是采用线性迭代法求解, 所需的计算量也要 $O(N^2)$. 平方复杂度算法只能进行小规模计算, 对于上亿次的计算规模, 即使采用最先进的计算机并行计算也不可行, 因此, 很难在大规模问题中得到推广应用. 针对这一问题目前最具影响力的解决方案有快速多极算法^[34-35]以及分级矩阵^[36-38]与自适应交叉近似算法^[39-40]的配套使用等. 相比于快速多极算法, 自适应交叉近似算法的操作复杂度低, 可集成性强, 更适合在自动化 CAE 分析中开展应用, 并且对于提升自动化分析的效率

具有重要意义。

针对 CAD/CAE 一体化、CAE 分析自动化以及求解效率方面存在的技术难题 (包括网格、插值、积分以及快速算法等方面), 本文提出一套完整的解决方案, 并对方案中具体包含的方法进行了系统的描述. 该方案集成了课题组数十年的研究成果, 通过不断地摸索尝试, 才逐步打通了各个环节之间的技术壁垒, 使其成为一套完整的边界类型的数值计算理论体系. 本文的第 1 节详细地介绍了边界面法, 该方法成功地避免了采用等参元而带来的几何误差, 使得 CAD/CAE 一体化成为现实, 是一种真正意义上的“等几何”分析方法. 第 2 节介绍了在边界面法的基础上产生的双层插值边界面法, 阐述了该方法与传统插值方法的不同. 双层插值边界面法统一了连续与非连续单元, 能够自然地模拟非连续场问题. 第 3 节介绍了球面细分法, 该方法对任意基本解类型、任意单元形状、任意源点位置都能高效地划分出质量很好的积分 patch, 有效地解决了边界面法在奇异和近奇异积分方面存在的稳定性、精确性等问题. 第 4 节介绍了基于几何信息选取骨架点的几何映射交叉近似算法和几何交叉近似算法, 这两种算法能够准确地近似远场矩阵, 有效降低边界元系数矩阵的储存量, 其中几何交叉近似算法近似精度更加稳定, 对节点的位置不敏感. 第 5 节介绍了基于二叉树结构的非连续网格, 该类型的网格在以往的数值计算中几乎没被采用过. 非连续网格能有效地避免前处理阶段的几何修复与简化等工作, 使得对于含有几何瑕疵的结构, 无需人工干预, 依然能够做到网格的自动生成, 有效地解决了 CAE 分析自动化在网格自动生成方面的困难. 第 6 节介绍了基于以上理论, 课题组采用 C++ 完全自主开发的“5aCAE 仿真软件”, 该软件目前已初具规模, 详情请参见 <http://www.5aCAE.com/>.

1 边界面法

边界面法 (boundary face method, BFM) 是湖南大学张见明等^[41]于 2009 年提出, 用于避免 CAD 模型转化为 CAE 模型的过程中存在的几何误差. 最初, 关于 BFM 的研究出现在无网格类型的数值方法中^[42]; 之后由于在细长结构方面插值的不稳定性, 便开展了基于网格插值问题的研究^[43-44], 相应的成果

涉及 B 样条边界面法^[45-46]、双互易^[47-48]、多互易边界面法^[49]、奇异以及近奇异积分^[18, 50]等方面. 在边界元中, 由于 BIE 所需的几何信息与 CAD 模型中的 Brep 数据结构高度吻合, 因此, 可以将 CAD 实体造型系统中边界表征 (Brep) 数据结构直接拿来作为 CAE 分析所需的数据结构, 从而有效地避免了等参元几何近似引入的误差; 如图 4 所示, 通过对比可以直观地发现, BFM 用于计算的模型与原几何模型一致, 而 BEM 则采用等参元的思想对几何模型做了一定的近似. 此外, 对于含有细小特征的结构, 传统的 BEM 比 BFM 需要更多的网格去离散原来的 CAD 模型, 如图 5 所示. 在 BFM 中, CAE 分析直接在 CAD 几何上进行, 从而自然地将 CAE 与 CAD 融为一体. 在离散过程中, 该方法避免使用抽象单元, 也不对结构作几何简化. 任何结构 (包括含有细小特征的结构, 如机械结构中的倒角、焊缝、退刀槽和小圆孔等), 从整体到局部, 都按照实际形状尺寸作三维实体处理, 我们将这种直接在结构的三维实体模型上进行的应力分析称为完整实体应力分析^[42]; 如图 6 所示, 以三通数值结果为例, 在小特征倒角处, BFM 没有做任何几何近似, 而且 BFM 在使用不同自由度下的求解结果是基本接近的, 而 FEM 在使用不同自由度下的求解结果差别很大, 不能确保收敛.

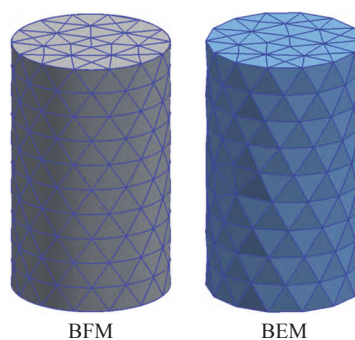


图 4 BFM 与 BEM 计算模型对比

Fig. 4 Comparison of BFM and BEM calculation models

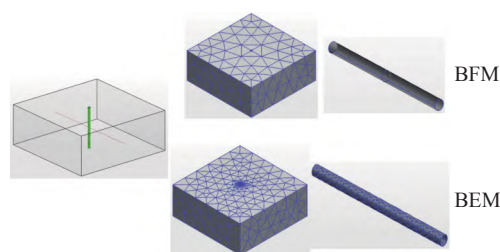


图 5 BFM 与 BEM 对比

Fig. 5 Comparison between BFM and BEM

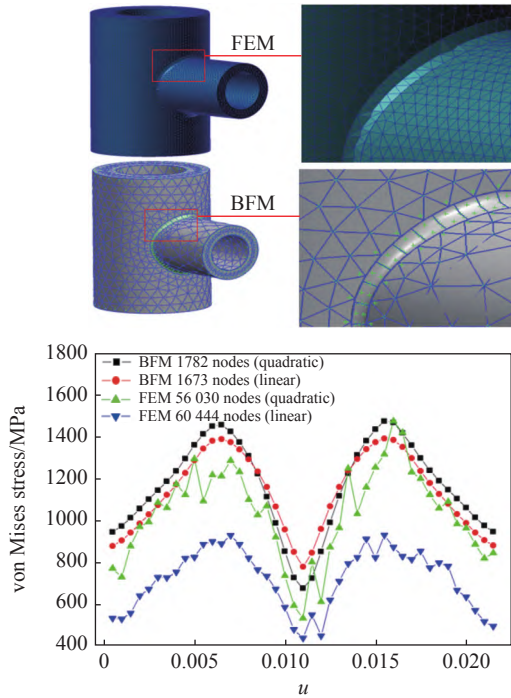


图 6 BFM 与 FEM 对比

Fig. 6 Comparison between BFM and FEM

不同于等几何分析, BFM 没有对 CAD 建模提出新的要求或限制, 不需要将所有曲面强制转化为样条曲面. 由于不要求单元连续, BFM 也不要求 CAD 几何模型表面具有严格意义上的连续性——面与面之间可以存在缝隙或重叠等“瑕疵”(这些“瑕疵”是在 CAD 建模过程中的布尔运算所产生的, 难以避免), 因而适应于裁剪面. 对于任意裁剪面, 也不需要将它们划分为正则的区域, 所以, BFM 具有等几何分析所具备的所有优点又克服了其缺点, 是真正意义上的等几何分析方法. 通过在稳态以及瞬态热传导问题^[51-55]、弹性问题^[56-57]、声场问题^[58-59]、多域问题^[60-61]、弹性动力学问题^[62-63]以及接触问题^[64-65]等工程问题中的应用, 进一步显示了 BFM 在准确性方面较 BEM 存在绝对的优势.

2 双层插值边界面法

2.1 双层插值概述

传统的连续与非连续单元在处理小特征处的非连续问题时存在准确性与数值稳定性等方面的缺点, 如图 7 所示, 当悬臂梁长宽比过大时, 如果在 BC 段布置一个传统的常值单元, 则不能反映转角; 若布置一个线性单元, 则其两个源点相较于相邻单元太近, 使得线性方程组的系数矩阵呈现病态; 若布

置一个传统的线性或二次的连续单元, 则位于几何角点处的源点不能同时正确地反映不同法向的一阶变量 (流量/面力). 为了克服传统单元的固有缺陷, 自然地模拟非连续问题, 张见明等^[66-69]提出了双层插值方法 (double-layer interpolation method, DLIM), 基于 DLIM 的离散单元被称为双层插值单元, 双层插值单元是在传统的非连续单元的顶点和边上添加虚点, 将非连续单元变成阶次更高的连续单元, 双层插值单元的插值点分为两种类型: (1) 源点, 位于单元内部, 如图 8 所示的红色实心点; (2) 虚点, 位于单元边界上, 如图 8 所示的蓝色空心点. DLIM 由两部分构成: (1) 单元插值, 为第一层插值, 单元插值的形函数与拉格朗日单元的插值形函数相同, 都是多项式插值, 用于插值物理变量; (2) 无网格插值, 为第 2 层

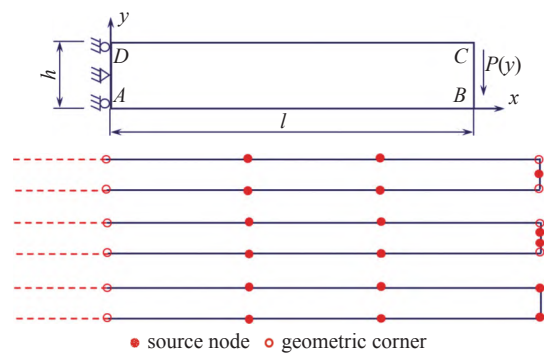


图 7 细长悬臂梁单元布置

Fig. 7 Layout of slender cantilever beam elements

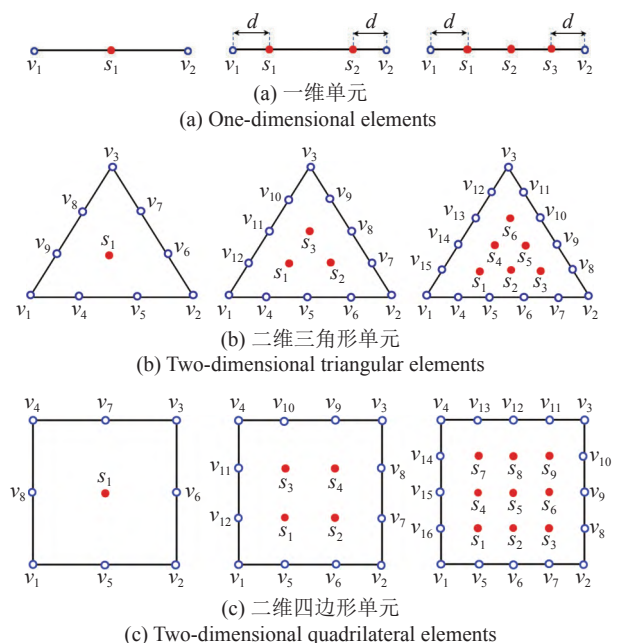


图 8 双层插值单元

Fig. 8 Dual interpolation elements

插值, 由于虚点不作为边界积分方程的配置点, 需要通过无网格插值的方法建立虚点与源点之间的物理量关系, 用于消除虚点的自由度.

综合来说, 双层插值具有以下优点.

(1) 统一了连续单元和非连续单元. 在双层插值中, 若不考虑虚点, 则等价于传统的非连续单元; 考虑虚点, 则变成连续单元.

(2) 将原非连续单元的插值阶次提高两阶, 在不增加计算规模的前提下大幅提高计算精度.

(3) 保留了无网格法的优点同时克服了其缺点. 由于网格的存在, 第 2 层插值不需要搜索判断邻近点的影响域半径.

(4) 将单元间的连接关系变得松散, 易于操控. 既可以插值连续函数, 也可以插值非连续函数, 如图 9, 而适宜于模拟裂纹扩展、接触问题接触区域的变化以及几何非线性分析中的网格重分. 还特别适合自适应分析, 如图 10.

(5) 完备描述了分析域的边界物理变量, 便于处理角点问题. 与角点相连的所有单元都可以计算出一组角点的物理状态变量 (如位移和应力张量), 从而反算角点附近虚节点和源节点之间的关系.

(6) 提高精度的同时降低对单元形状的要求, 便于处理细小特征和几何噪音, 如图 11.

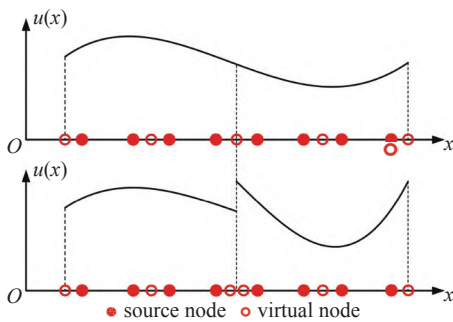


图 9 连续和非连续函数插值

Fig. 9 Continuous and discontinuous interpolation

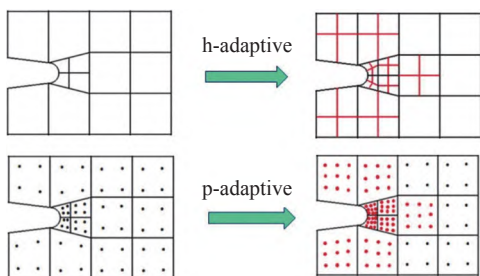
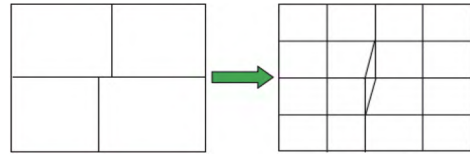


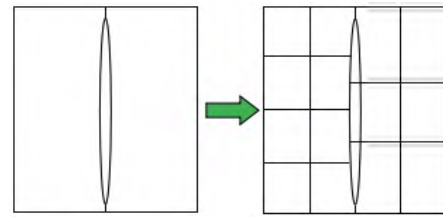
图 10 自适应分析方案

Fig. 10 Adaptive analysis scheme



(a) 短边“瑕疵”

(a) Short edge defect



(b) 窄面“瑕疵”

(b) Narrow face defect

图 11 “脏”的几何模型

Fig. 11 Dirty geometric models

2.2 双层插值的第一层插值

双层插值的第一层插值类似于传统的单元插值, 源、虚点均作为插值点对物理量进行插值, 同样以拉格朗日多项式作为插值基函数.

对于位势问题, 位势 u 以及法向流量 q 的第一层插值表达式如下

$$\left. \begin{aligned} u(\eta) &= \sum_{\alpha=1}^{ns} N_{\alpha}^s(\eta)u(Q_{\alpha}^s) + \sum_{\beta=1}^{nv} N_{\beta}^v(\eta)u(Q_{\beta}^v) \\ q(\eta) &= \sum_{\alpha=1}^{ns} N_{\alpha}^s(\eta)q(Q_{\alpha}^s) + \sum_{\beta=1}^{nv} N_{\beta}^v(\eta)q(Q_{\beta}^v) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

对于弹性问题, 位移 u 以及面力 t 的第一层插值表达式如下

$$\left. \begin{aligned} u_i(\xi, \eta) &= \sum_{\alpha=1}^{ns} N_{\alpha}^s(\xi, \eta)u_i(Q_{\alpha}^s) + \sum_{\beta=1}^{nv} N_{\beta}^v(\xi, \eta)u_i(Q_{\beta}^v) \\ t_i(\xi, \eta) &= \sum_{\alpha=1}^{ns} N_{\alpha}^s(\xi, \eta)t_i(Q_{\alpha}^s) + \sum_{\beta=1}^{nv} N_{\beta}^v(\xi, \eta)t_i(Q_{\beta}^v) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, ns 表示双层插值单元中源点的个数, nv 表示双层插值单元中虚点的个数 (对于二维问题 $nv = 2$), 且源点与虚点的个数之和 $ns + nv$ 等于拉格朗日多项式的总节点数. η 表示被插点的参数坐标. $N_{\alpha}^s(\eta)$, $u(Q_{\alpha}^s)$ 和 $q(Q_{\alpha}^s)$ 分别表示第 α 个源点的形函数、位势和法向流量; $u_i(Q_{\alpha}^s)$ 和 $t_i(Q_{\alpha}^s)$ 分别表示 α 个源点沿 i 方向的位移和面力. $N_{\beta}^v(\eta)$, $u(Q_{\beta}^v)$ 和 $q(Q_{\beta}^v)$ 表示第 β 个虚点的形函数、位势和法向流量. $u_i(Q_{\beta}^v)$ 和 $t_i(Q_{\beta}^v)$ 分别表示 β 个源点沿 i 方向的位移和面力.

2.3 双层插值的第二层插值

由于移动最小二乘法 (moving least-square method, MLS) 在散乱点插值中精度高且计算稳定, 因此被无网格法广泛采用. 最初关于双层插值的研究是建立在 MLS 之上, 因此被称为 DLIM-MLS. DLIM-MLS 被广泛应用于求解弹性问题^[70-72]、裂纹扩展问题^[73-74]、接触问题^[75]、位势问题^[66, 76]以及声场问题^[77]等, 在非连续问题 (角点问题、接触边界) 的插值方面获得了良好的数值效果. 但是基于 MLS 的双层插值界面法存在两方面的不足: (1) MLS 插值形函数是建立在参数坐标之上, 即采用曲线的参数坐标 (二维问题) 和曲面的参数坐标 (三维问题), 这就使得每次执行 MLS 插值时都需要访问曲线或曲面的参数空间, 从而增加了时间成本, 且存在曲线和曲面的周期性问题; (2) 对于二维问题, MLS 插值的影响域被限制在一条边上, 如图 12(a) 所示, 由于多项式基选择的是二次基函数, 使得目标虚点在当前边上至少搜到 3 个源点才能建立起 MLS 插值形函数. 对于三维问题, 则影响域被限制于一个面内, 且要求该面上须有 3 层源点, 如图 12(b) 所示. 若是对于含有短边的二维问题以及含有薄型结构的三维问题, 当虚点所在的边或曲面源点数不足时, MLS 插值将无法建立; 而如果选择在细小特征处布置多个源点, 则又会带来近奇异积分问题以及系数矩阵的病态问题.

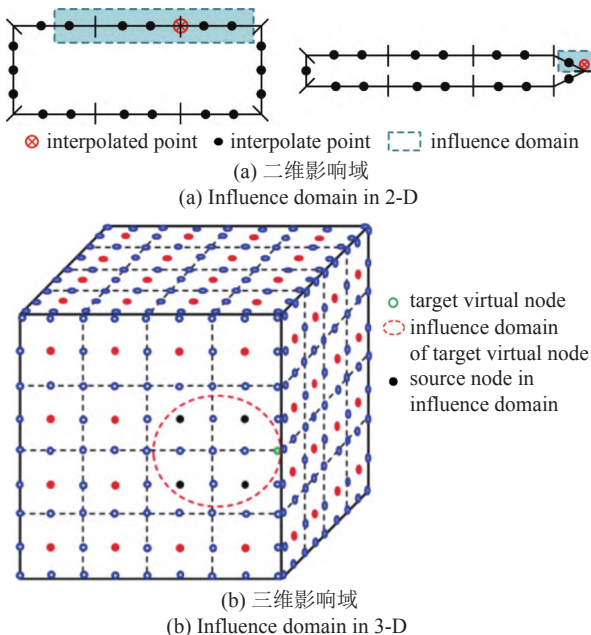


图 12 MLS 插值影响域
Fig. 12 The influence domain of MLS interpolation

为了克服 MLS 在建立第二层插值时存在的不足, 张见明等^[63-64]又提出了基于 Hermite-type 移动最小二乘法 (hermite-type moving least squares, HMLS) 的第二层插值方法. 除了弥补 MLS 的缺点, HMLS 插值还具有以下 3 方面的优点: (1) HMLS 的插值形函数直接建立在笛卡尔坐标下, 而不是像 MLS 插值一样采用参数坐标建立插值形函数. (2) 在 HMLS 插值中, 虚点的影响域将不被限制, 可以在邻近的几何边 (二维问题) 或者几何面 (三维问题) 上搜索插值所需的源点, 如图 13 所示. 相比来说, HMLS 插值实现更为方便, 更适合于求解含有短边或者窄面等小特征结构的问题. (3) 自然满足位势及其导数的连续性要求. 关于 HMLS 的工程应用可见文献^[78-81], 其中, 数值算例不乏包含短边或薄型结构等, 通过在具有以上特征的几何边/面布置单层源点, 均得到了较 MLS 更好的数值结果, 充分展现了 HMLS 的优势.

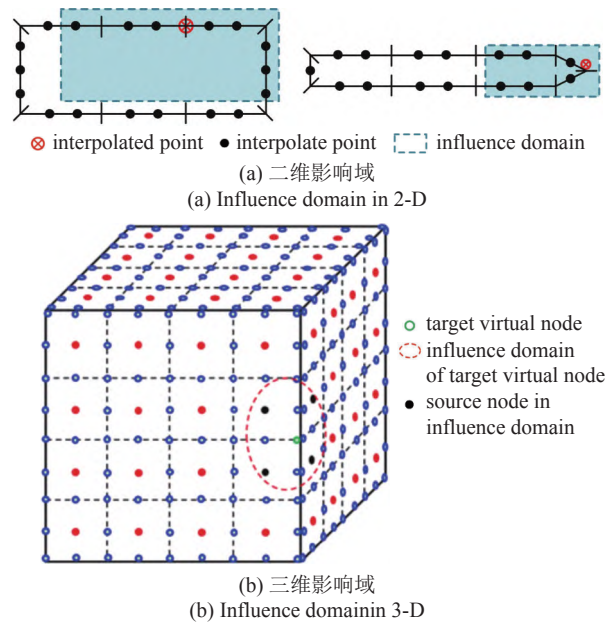


图 13 HMLS 插值影响域
Fig. 13 The influence domain of HMLS interpolation

2.3.1 基于 MLS 的第二层插值

对于位势问题, 位势 u 以及法向流量 q 的 MLS 第二层插值关系表达式

$$\left. \begin{aligned} u(Q_\beta^v) &= \sum_{m=1}^{M\beta} \phi_m^{vs}(\eta_\beta^v) u(Q_m^s) \\ q(Q_\beta^v) &= \sum_{m=1}^{M\beta} \phi_m^{vs}(\eta_\beta^v) q(Q_m^s) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

对于弹性问题, 位移 u 以及面力 t 的 MLS 第二层插值关系表达式

$$\left. \begin{aligned} u_j(Q_\beta^v) &= \sum_{m=1}^{M\beta} \varphi_m^{vs}(\eta_\beta^v) u_j(Q_{m(\beta)}^s) \\ t_j(Q_\beta^v) &= \sum_{m=1}^{M\beta} \varphi_m^{vs}(\eta_\beta^v) t_j(Q_{m(\beta)}^s) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中, $M\beta$ 表示虚点影响域内源节点的个数; η_β^v 是虚点在对曲线或曲面上的参数坐标; $u(Q_{m(\beta)}^s)$ 和 $q(Q_{m(\beta)}^s)$ 分别表示虚点影响域内的第 m 个源点的位势和法向流量; $u_j(Q_{m(\beta)}^s)$ 和 $t_j(Q_{m(\beta)}^s)$ 分别表示虚点影响域内的位移和面力; $\varphi_m^{vs}(\eta_\beta^v)$ 和 $\varphi_m^{vs}(\eta_\beta^v)$ 分别表示虚点影响域内的第 m 个源点所对应的第二层插值 MLS 形函数. 无论是位势还是弹性问题, 第二层插值 MLS 形函数是一样的.

2.3.2 基于 HMLS 的第二层插值

对于位势问题, 位势 u 以及法向流量 q 的 HMLS 第二层插值关系表达式^[80-81]

$$\left. \begin{aligned} u(Q_\beta^v) &= \sum_{k=1}^N \theta_k^{uu}(x_\beta^v, y_\beta^v) u(Q_k^s) + \sum_{k=1}^N \theta_k^{uq}(x_\beta^v, y_\beta^v) q(Q_k^s) \\ q(Q_\beta^v) &= \sum_{k=1}^N \theta_k^{qu}(x_\beta^v, y_\beta^v, n_\beta^v) u(Q_k^s) + \sum_{k=1}^N \theta_k^{qq}(x_\beta^v, y_\beta^v, n_\beta^v) q(Q_k^s) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

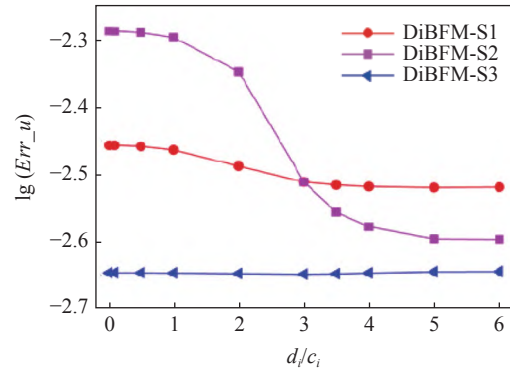
对于弹性问题, 位移 u 以及面力 t 的 HMLS 第二层插值关系表达式

$$\left. \begin{aligned} u_i(Q_\beta^v) &= \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \theta_k^{u_i u_j}(x_\beta^v, y_\beta^v) u_j(Q_k^s) + \\ &\quad \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \theta_k^{u_i t_j}(x_\beta^v, y_\beta^v) t_j(Q_k^s) \\ t_i(Q_\beta^v) &= \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \theta_k^{t_i u_j}(x_\beta^v, y_\beta^v, n_\beta^v) u_j(Q_k^s) + \\ &\quad \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \theta_k^{t_i t_j}(x_\beta^v, y_\beta^v, n_\beta^v) t_j(Q_k^s) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

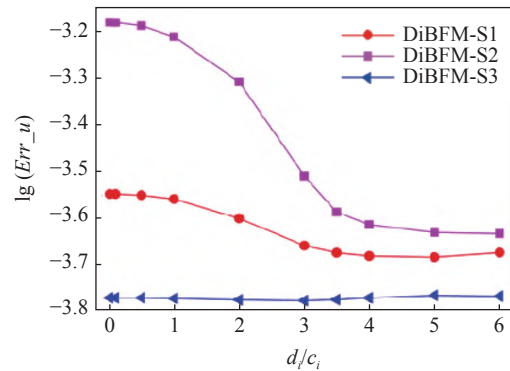
其中, M 表示方向, 对于二维问题 $M=2$, 三维问题 $M=3$. N 表示虚点影响域内源节点的个数, k 表示影响域内源点的编号. $\theta_k^{uu}(x_\beta^v, y_\beta^v)$, $\theta_k^{uq}(x_\beta^v, y_\beta^v)$, $\theta_k^{qu}(x_\beta^v, y_\beta^v, n)$, $\theta_k^{qq}(x_\beta^v, y_\beta^v, n_\beta^v)$, $\theta_k^{u_i u_j}(x_\beta^v, y_\beta^v)$, $\theta_k^{u_i t_j}(x_\beta^v, y_\beta^v)$, $\theta_k^{t_i u_j}(x_\beta^v, y_\beta^v, n_\beta^v)$ 和 $\theta_k^{t_i t_j}(x_\beta^v, y_\beta^v, n_\beta^v)$ 表示虚点影响域内的第 k 个源点的 HMLS 形函数. $u(Q_k^s)$ 和 $q(Q_k^s)$ 分别表示第 k 个源点

的位势与法向流量, $u_j(Q_k^s)$ 和 $t_j(Q_k^s)$ 表示源点的位移与面力. HMLS 型的双层插值与传统的基于 MLS 型的双层插值不同, 在双层插值关系式 (5) 和式 (6) 中, 被插点的物理量 (位势与法向流量或位移与面力) 除了与位势/位移有关外, 还与法向流量/面力有关. 除此之外, 第二层插值的形函数不再是建立在局部坐标系下, 而是建立在全局笛卡尔坐标系下, 这种类型的第二层插值关系能更为准确地表达小特征处以及几何不连续点处的物理变量, 并且插值点的搜索范围更为广泛.

在传统的无网格法中, 影响域的大小是影响插值效果的重要因素之一. 本文第二层插值中的影响域的确定不同于传统的无网格法, 在我们的网格数据结构中建立了单元、单元边和单元节点这三者的拓扑连接关系, 通过这些连接关系可以直接搜索到虚点相邻单元的源点, 搜索的范围相当于影响域. 图 14 给出了不同影响域大小对计算结果的影响, 其中 d/c_i 为控制影响域大小及权函数形状的参数, DiBFM-S x ($x=1, 2, 3$) 表示不同阶次的双层插值单元. 当前搜



(a) Dirichlet 边界条件
(a) Dirichlet boundary conditions



(b) 混合边界条件
(b) Mixed boundary conditions

图 14 影响域大小对计算结果的影响

Fig. 14 The impact of the size of influence domain on calculation results

索范围的设定即影响域的大小是以虚点为原点包围虚点的相邻两圈单元, 此时插值的精度和鲁棒性比较好.

2.4 边界积分方程的双层插值边界面法离散

双层插值与边界面法的结合被称为双层插值边界面法 (DiBFM-HMLS). 在传统的边界元法中, 边界积分方程中的物理变量采用传统的单元插值 (拉格朗日插值) 进行近似, 而在双层插值边界面法中, 边界积分方程则采用双层插值单元进行离散. 在离散的边界积分方程中, 同时包含源点以及虚点的自由度, 由于虚点不作为边界积分方程的配置点, 需要借助上述基于 HMLS 的第二层插值消去虚点的自由度.

2.4.1 位势问题的双层插值边界面法

位势问题的边界积分方程如下

$$c(P)u(P) + \int_{\Gamma} q^*(P, Q)u(Q)d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u^*(P, Q)q(Q)d\Gamma(Q) \tag{7}$$

其中, P 为源点, Q 为场点, $u^*(P, Q)$ 和 $q^*(P, Q)$ 为 Laplace 方程的基本解.

对于二维位势问题

$$\left. \begin{aligned} u^*(P, Q) &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(P, Q)} \\ q^*(P, Q) &= \frac{\partial u^*(P, Q)}{\partial n(Q)} \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

对于三维位势问题

$$\left. \begin{aligned} u^*(P, Q) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(P, Q)} \\ q^*(P, Q) &= \frac{\partial u^*(P, Q)}{\partial n(Q)} \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

边界积分方程的双层插值单元离散形式

$$\sum_{e=1}^{NE} \left[\sum_{\alpha=1}^{n_{\alpha(e)}} h^{s\alpha}(P_i)u(Q_{\alpha(e)}^s) + \sum_{\beta=1}^{n_{\beta(e)}} h^{s\beta}(P_i)u(Q_{\beta(e)}^v) \right] = \sum_{e=1}^{NE} \left[\sum_{\alpha=1}^{n_{\alpha(e)}} g^{s\alpha}(P_i)q(Q_{\alpha(e)}^s) + \sum_{\beta=1}^{n_{\beta(e)}} g^{s\beta}(P_i)q(Q_{\beta(e)}^v) \right] \tag{10}$$

$i = 1, 2, \dots, NS$

$$\left. \begin{aligned} h^{s\alpha}(P_i) &= \int_{\Gamma_e} q^*(P_i, Q)N_{\alpha(e)}^s(Q)d\Gamma(Q) + \frac{1}{2}\delta_{\alpha(e)}^i \\ h^{s\beta}(P_i) &= \int_{\Gamma_e} q^*(P_i, Q)N_{\beta(e)}^v(Q)d\Gamma(Q) \\ g^{s\alpha}(P_i) &= \int_{\Gamma_e} u^*(P_i, Q)N_{\alpha(e)}^s(Q)d\Gamma(Q) \\ g^{s\beta}(P_i) &= \int_{\Gamma_e} u^*(P_i, Q)N_{\beta(e)}^v(Q)d\Gamma(Q) \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

其中, NE 表示双层插值单元个数, NS 表示总的源点数; $N_{\alpha(e)}^s(Q)$ 和 $N_{\beta(e)}^v(Q)$ 分别表示双层插值单元中源点和虚点的形函数.

依据三类边界条件, 将式 (11) 写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} H_{dd}^{ss} & H_{dr}^{ss} & H_{dn}^{ss} \\ H_{rd}^{ss} & H_{rr}^{ss} & H_{rn}^{ss} \\ H_{nd}^{ss} & H_{nr}^{ss} & H_{nn}^{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_d^s \\ u_r^s \\ u_n^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{dd}^{sv} & H_{dr}^{sv} & H_{dn}^{sv} \\ H_{rd}^{sv} & H_{rr}^{sv} & H_{rn}^{sv} \\ H_{nd}^{sv} & H_{nr}^{sv} & H_{nn}^{sv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_d^v \\ u_r^v \\ u_n^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{dd}^{ss} & G_{dr}^{ss} & G_{dn}^{ss} \\ G_{rd}^{ss} & G_{rr}^{ss} & G_{rn}^{ss} \\ G_{nd}^{ss} & G_{nr}^{ss} & G_{nn}^{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_d^s \\ \tilde{q}_r^s \\ \tilde{q}_n^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{dd}^{sv} & G_{dr}^{sv} & G_{dn}^{sv} \\ G_{rd}^{sv} & G_{rr}^{sv} & G_{rn}^{sv} \\ G_{nd}^{sv} & G_{nr}^{sv} & G_{nn}^{sv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_d^v \\ \tilde{q}_r^v \\ \tilde{q}_n^v \end{bmatrix} \tag{12}$$

其中, 下标 d, n 和 r 分别表示 Dirichlet, Neumann 和 Robin 类型的边界条件, $\bar{u}_d^s, \bar{u}_d^v, \tilde{q}_n^s$ 和 \tilde{q}_n^v 表示已知向量. 且在 Robin 边界条件下, 虚点流量与位势存在以下关系

$$q_r^v = \beta_r^v - \alpha_r^v u_r^v \tag{13}$$

于是式 (12) 可以进一步写为

$$\begin{bmatrix} H_{dd}^{ss} & H_{dr}^{ss} & H_{dn}^{ss} \\ H_{rd}^{ss} & H_{rr}^{ss} & H_{rn}^{ss} \\ H_{nd}^{ss} & H_{nr}^{ss} & H_{nn}^{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_d^s \\ u_r^s \\ u_n^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{dd}^{sv} & H_{dr}^{sv} + \alpha_r^v G_{dr}^{sv} & H_{dn}^{sv} \\ H_{rd}^{sv} & H_{rr}^{sv} + \alpha_r^v G_{rr}^{sv} & H_{rn}^{sv} \\ H_{nd}^{sv} & H_{nr}^{sv} + \alpha_r^v G_{nr}^{sv} & H_{nn}^{sv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_d^v \\ u_r^v \\ u_n^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{dd}^{ss} & G_{dr}^{ss} & G_{dn}^{ss} \\ G_{rd}^{ss} & G_{rr}^{ss} & G_{rn}^{ss} \\ G_{nd}^{ss} & G_{nr}^{ss} & G_{nn}^{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_d^s \\ \tilde{q}_r^s \\ \tilde{q}_n^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{dd}^{sv} & G_{dr}^{sv} & G_{dn}^{sv} \\ G_{rd}^{sv} & G_{rr}^{sv} & G_{rn}^{sv} \\ G_{nd}^{sv} & G_{nr}^{sv} & G_{nn}^{sv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_d^v \\ \beta_r^v \\ \tilde{q}_n^v \end{bmatrix} \tag{14}$$

由于虚点不作为边界积分方程的配置点, 因此需要借助双层插值的第二层插值消去虚点自由度, 基于 HMLS 的第二层插值^[80-81] 为

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_d^v \\ u_r^v \\ u_n^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_d^v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Psi_{rd}^{uu} & \Psi_{rr}^{uu} & \Psi_{rn}^{uu} \\ \Psi_{nd}^{uu} & \Psi_{nr}^{uu} & \Psi_{nn}^{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_d^s \\ u_r^s \\ u_n^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Psi_{rd}^{uq} & \Psi_{rr}^{uq} & \Psi_{rn}^{uq} \\ \Psi_{nd}^{uq} & \Psi_{nr}^{uq} & \Psi_{nn}^{uq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_d^s \\ \tilde{q}_r^s \\ \tilde{q}_n^s \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} q_d^v \\ q_r^v \\ q_n^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{q}_r^v \\ \tilde{q}_n^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_{dd}^{qu} & \Psi_{dr}^{qu} & \Psi_{dn}^{qu} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d^s \\ u_r^s \\ u_n^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_{dd}^{qq} & \Psi_{dr}^{qq} & \Psi_{dn}^{qq} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_d^s \\ \tilde{q}_r^s \\ \tilde{q}_n^s \end{bmatrix} \tag{16}$$

其中, Ψ^{uu} , Ψ^{uq} , Ψ^{qu} 和 Ψ^{qq} 为 HMLS 形函数矩阵, 同时再对 Robin 边界条件下的源点施加以下关系

$$\mathbf{q}_r^s = \beta_r^s - \alpha_r^s \mathbf{u}_r^s \quad (17)$$

联合式 (14)~式 (17) 可以得到以下关系式

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_{dd}^{ss} & \bar{\mathbf{H}}_{dr}^{ss} & \bar{\mathbf{H}}_{dn}^{ss} \\ \bar{\mathbf{H}}_{rd}^{ss} & \bar{\mathbf{H}}_{rr}^{ss} & \bar{\mathbf{H}}_{rn}^{ss} \\ \bar{\mathbf{H}}_{nd}^{ss} & \bar{\mathbf{H}}_{nr}^{ss} & \bar{\mathbf{H}}_{nn}^{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_d^s \\ \mathbf{u}_r^s \\ \mathbf{u}_n^s \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_{dd}^{ss} & \bar{\mathbf{G}}_{dr}^{ss} & \bar{\mathbf{G}}_{dn}^{ss} \\ \bar{\mathbf{G}}_{rd}^{ss} & \bar{\mathbf{G}}_{rr}^{ss} & \bar{\mathbf{G}}_{rn}^{ss} \\ \bar{\mathbf{G}}_{nd}^{ss} & \bar{\mathbf{G}}_{nr}^{ss} & \bar{\mathbf{G}}_{nn}^{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_d^s \\ \mathbf{q}_r^s \\ \mathbf{q}_n^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{dd}^{ss} & \mathbf{G}_{dr}^{ss} & \mathbf{G}_{dn}^{ss} \\ -\mathbf{H}_{rd}^{ss} & \mathbf{G}_{rr}^{ss} & \mathbf{G}_{rn}^{ss} \\ -\mathbf{H}_{nd}^{ss} & \mathbf{G}_{nr}^{ss} & \mathbf{G}_{nn}^{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_d^s \\ \beta_r^s \\ \bar{\mathbf{q}}_n^s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{dd}^{sv} & \mathbf{G}_{dr}^{sv} & \mathbf{G}_{dn}^{sv} \\ -\mathbf{H}_{rd}^{sv} & \mathbf{G}_{rr}^{sv} & \mathbf{G}_{rn}^{sv} \\ -\mathbf{H}_{nd}^{sv} & \mathbf{G}_{nr}^{sv} & \mathbf{G}_{nn}^{sv} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_d^v \\ \beta_r^v \\ \bar{\mathbf{q}}_n^v \end{pmatrix} \quad (18)$$

整理式 (18) 可得

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (19)$$

2.4.2 弹性问题的双层插值边界法

弹性问题的边界积分方程如下

$$c_{ij}(P)u_j(P) = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q)t_j(Q)d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) \quad (20)$$

其中, P 为源点, Q 为场点, $U_{ij}(P, Q)$ 和 $T_{ij}(P, Q)$ 为平衡微分方程的基本解。

对于二维弹性问题 ($i, j = 1, 2$)

$$\left. \begin{aligned} U_{ij}(P, Q) &= \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} \ln \frac{1}{r} + r_{,i}r_{,j} \right] \\ T_{ij}(P, Q) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j} \right] - (1-2\nu)(r_{,in}j - r_{,jn}i) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

对于三维弹性问题 ($i, j = 1, 2, 3$)

$$\left. \begin{aligned} U_{ij}(P, Q) &= \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right] \\ T_{ij}(P, Q) &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \right] + (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

边界积分方程的双层插值单元离散形式

$$\sum_{e=1}^{NE} \left[\sum_{\alpha=1}^{n_{\alpha(e)}} h_{ij}^{s\alpha}(P_k) u_j(Q_{e(\alpha)}^s) + \sum_{\beta=1}^{n_{\beta(e)}} h_{ij}^{sv}(P_k) u_j(Q_{e(\beta)}^v) \right] = \sum_{e=1}^{NE} \left[\sum_{\alpha=1}^{n_{\alpha(e)}} g_{ij}^{s\alpha}(P_k) t_j(Q_{e(\alpha)}^s) + \sum_{\beta=1}^{n_{\beta(e)}} g_{ij}^{sv}(P_k) t_j(Q_{e(\beta)}^v) \right] \quad (23)$$

$k = 1, 2, \dots, NS$

$$\left. \begin{aligned} h_{ij}^{s\alpha}(P_k) &= \int_{\Gamma_e} T_{ij}(P_k, Q) N_{\alpha(e)}^s(Q) d\Gamma_e(Q) + \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{\alpha(e)}^k \\ h_{ij}^{sv}(P_k) &= \int_{\Gamma_e} T_{ij}(P_k, Q) N_{\beta(e)}^v(Q) d\Gamma_e(Q) \\ g_{ij}^{s\alpha}(P_k) &= \int_{\Gamma_e} U_{ij}(P_k, Q) N_{\alpha(e)}^s(Q) d\Gamma_e(Q) \\ g_{ij}^{sv}(P_k) &= \int_{\Gamma_e} U_{ij}(P_k, Q) N_{\beta(e)}^v(Q) d\Gamma_e(Q) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中, NE 表示双层插值单元个数; $N_{\alpha(e)}^s(Q)$ 和 $N_{\beta(e)}^v(Q)$ 分别表示双层插值单元中源点和虚点的形函数。

将式 (23) 写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{dd}^{s_i s_j} & \mathbf{H}_{dn}^{s_i s_j} \\ \mathbf{H}_{nd}^{s_i s_j} & \mathbf{H}_{nn}^{s_i s_j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_d^{s_j} \\ \mathbf{u}_n^{s_j} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{dd}^{s_i v_j} & \mathbf{H}_{dn}^{s_i v_j} \\ \mathbf{H}_{nd}^{s_i v_j} & \mathbf{H}_{nn}^{s_i v_j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_d^{v_j} \\ \mathbf{u}_n^{v_j} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{dd}^{s_i s_j} & \mathbf{G}_{dn}^{s_i s_j} \\ \mathbf{G}_{nd}^{s_i s_j} & \mathbf{G}_{nn}^{s_i s_j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_d^{s_j} \\ \bar{\mathbf{t}}_n^{s_j} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{dd}^{s_i v_j} & \mathbf{G}_{dn}^{s_i v_j} \\ \mathbf{G}_{nd}^{s_i v_j} & \mathbf{G}_{nn}^{s_i v_j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_d^{v_j} \\ \bar{\mathbf{t}}_n^{v_j} \end{pmatrix} \quad (25)$$

其中 $\bar{\mathbf{u}}_d^{s_j}$, $\bar{\mathbf{u}}_d^{v_j}$, $\bar{\mathbf{t}}_n^{s_j}$ 和 $\bar{\mathbf{t}}_n^{v_j}$ 表示已知向量。

由于虚点不作为边界积分方程的配置点, 因此需要借助双层插值的第二层插值消去虚点自由度, 基于 HMLS 的第二层插值为

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_d^{v_j} \\ \mathbf{u}_n^{v_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_d^{v_j} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Phi_{u_n u_d}^{v_j s_k} & \Phi_{u_n u_n}^{v_j s_k} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_d^{s_k} \\ \mathbf{u}_n^{s_k} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Phi_{t_n t_d}^{v_j s_k} & \Phi_{t_n t_n}^{v_j s_k} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_d^{s_k} \\ \bar{\mathbf{t}}_n^{s_k} \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_d^{v_j} \\ \bar{\mathbf{t}}_n^{v_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{t}}_n^{v_j} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{t_n u_d}^{v_j s_k} & \Phi_{t_n u_n}^{v_j s_k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_d^{s_k} \\ \mathbf{u}_n^{s_k} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{t_n t_d}^{v_j s_k} & \Phi_{t_n t_n}^{v_j s_k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_d^{s_k} \\ \bar{\mathbf{t}}_n^{s_k} \end{pmatrix} \quad (27)$$

其中, $\Phi_{uu}^{v_j s_k}$, $\Phi_{ut}^{v_j s_k}$, $\Phi_{tu}^{v_j s_k}$ 和 $\Phi_{tt}^{v_j s_k}$ 为 HMLS 形函数矩阵。

利用式 (26) 和式 (27) 消去式 (25) 中虚点的自由度, 得到如下形式

$$\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{G}}_{dd}^{s_i s_j} & \bar{\mathbf{H}}_{dn}^{s_i s_j} \\ -\bar{\mathbf{G}}_{nd}^{s_i s_j} & \bar{\mathbf{H}}_{nn}^{s_i s_j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_d^{s_j} \\ \mathbf{u}_n^{s_j} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{H}}_{dd}^{s_i s_j} & \mathbf{G}_{dn}^{s_i s_j} \\ -\bar{\mathbf{H}}_{nd}^{s_i s_j} & \mathbf{G}_{nn}^{s_i s_j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_d^{s_j} \\ \bar{\mathbf{t}}_n^{s_j} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{dd}^{s_i v_j} & \mathbf{G}_{dn}^{s_i v_j} \\ -\mathbf{H}_{nd}^{s_i v_j} & \mathbf{G}_{nn}^{s_i v_j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_d^{v_j} \\ \bar{\mathbf{t}}_n^{v_j} \end{pmatrix} \quad (28)$$

整理式 (18) 可得

$$\mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j = \mathbf{b}_i \quad (29)$$

3 球面细分法

针对奇异性阶次存在差异的奇异积分, 许多学者提出了不同的解决方案, 主要可以归为以下几类: (1) 特殊积分公式法^[28], 该方法采用的是对数型加权数值积分公式来处理二维问题中的对数型弱奇异积分; (2) 坐标变换法^[29], 该方法通过坐标变换产生的雅可比在源点 (奇异点) 处为 0 从而抵消分母上的零因子的方式消除被积函数的奇异性; (3) 间接法也即特解法^[18-19], 该方法利用边界积分方程的简单特解 (刚体位移) 将柯西主值积分转化为正则积分进行间接求解; (4) 正则化方法^[20] 是采用一系列关于基本解的恒等式将超奇异积分方程弱奇异化, 降低了超奇异积分的计算难度; (5) 局部坐标近似展开法^[30], 该方法采用在奇异点局部坐标级数展开的近似表达式, 将奇异积分化为包含解析项的常规积分, 对于任意类型的积分均适用. 然而, 无论是坐标变换法还是局部坐标近似展开法, 它们的精度都会受到单元形状和源点位置的影响. 当单元形状较差或者源点相对于积分单元的位置较偏时, 积分计算的精度会急剧下降. 因为, 上述的积分方案都是先将源点直接和单元顶点相连, 分割出子单元块, 然后对各子块进行积分. 当源点靠近单元边界时, 如图 15 所示, 得到的子单元块形状很差, 难以保证积分精度.

在薄型结构或细小特征处经常会出现大量的近奇异积分, 针对该问题, 一些学者也提出了相应的解决方案, 包括: (1) 单元细分法^[52, 58], 该方法通过将积分单元划分成一系列子单元, 再在每个子单元布置高斯积分点实现积分的精确计算; (2) 解析和半解析法^[54, 59] 是通过分部积分对近奇异积分进行分离, 然后采用解析或半解析的方式进行计算, 积分精度高, 但是目前只局限于常值和线性单元; (3) 非线性变换法^[46, 48, 56], 该方法是将源点投影到积分单元上, 然后通过变换算子的雅可比在投影点附近的近零因子来消除分母上的近零因子. 单元形状以及投影点的位置是决定非线性变换能否成功开展的关键所在^[51, 82-83]. 在所有的近奇异积分方案中, 四叉树单元细分法 (如图 16 所示) 的通用性和稳定性最好, 但是

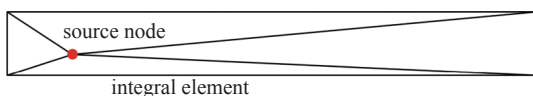


图 15 传统细分方法

Fig. 15 Conventional subdivision method

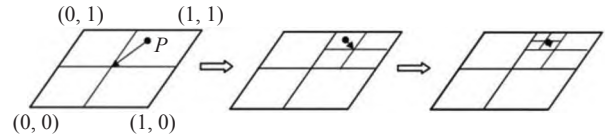


图 16 四叉树单元细分方法

Fig. 16 Quadtree element subdivision method

在源点离单元很近的情况下又将面临效率问题.

瞬态热传导的时域基本解关于时间步长具有奇异性 (见式 (30)), 源点附近的值会随着时间步长的逐渐缩短变化愈加剧烈, 图 17 显示了不同时间步长的基本解, 对于该类型的近奇异积分常用的处理方式: (1) 更细密的网格离散, 使得在一个时间步长内热的传导距离跨过一个单元, 实现积分的稳定计算; (2) 虚拟步长法通过计算虚拟时间节点上的温度, 然后通过函数插值将虚拟时间节点上的值按比例缩放到实际时间步长节点, 该方法能够在一定程度上解决小步长情况下的数值不稳定问题; (3) 单元细分和非线性变换法^[50], 该方法首先确定基本解剧烈变化区间, 进而在该区间内采用非线性变换来减弱基本解的剧烈变化. 同样对含有时域基本解的弹性动力学问题, 其基本解的表达式可见式 (31), 函数值在 $c_1\Delta t$ 和 $c_2\Delta t$ 会产生突变, 其图像可见图 18(a), 突变处分别对应两处波动前沿如图 18(b) 所示. 针对该类型的积分通常采用虚拟力法用等效的体积力代替非 0 初始条件, 把对基本解的域积分转化成对时间以及空间的积分, 通过时间的解析积分消除基本解中的 Delta 函数, 从而进行域内球面积分的计算. 但是, 当遇到形状不规则的单元以及任意的源点位置, 确定一种细分方法, 使其能够准确分出基本解剧烈变化的区间或者划分出与基本解的不连续区间相一致的子单元, 是保证时域基本解积分精度和提高数值稳定性的关键

$$u^s = \frac{1}{(4\pi k\tau)^{1.5}} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) \quad (30)$$

$$U_{ij}^*(\xi, \tau; x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ At' \left[H\left(t', \frac{r}{c_1}\right) - H\left(t', \frac{r}{c_2}\right) \right] + B\Delta\left(t', \frac{r}{c_1}\right) + C\Delta\left(t', \frac{r}{c_2}\right) \right\} \quad (31)$$

关于以上问题的研究已有几十年的历史, 但是迄今仍没有一个统一的, 对任意基本解类型、任意单元形状、任意源点位置都适用的, 高效高精度的

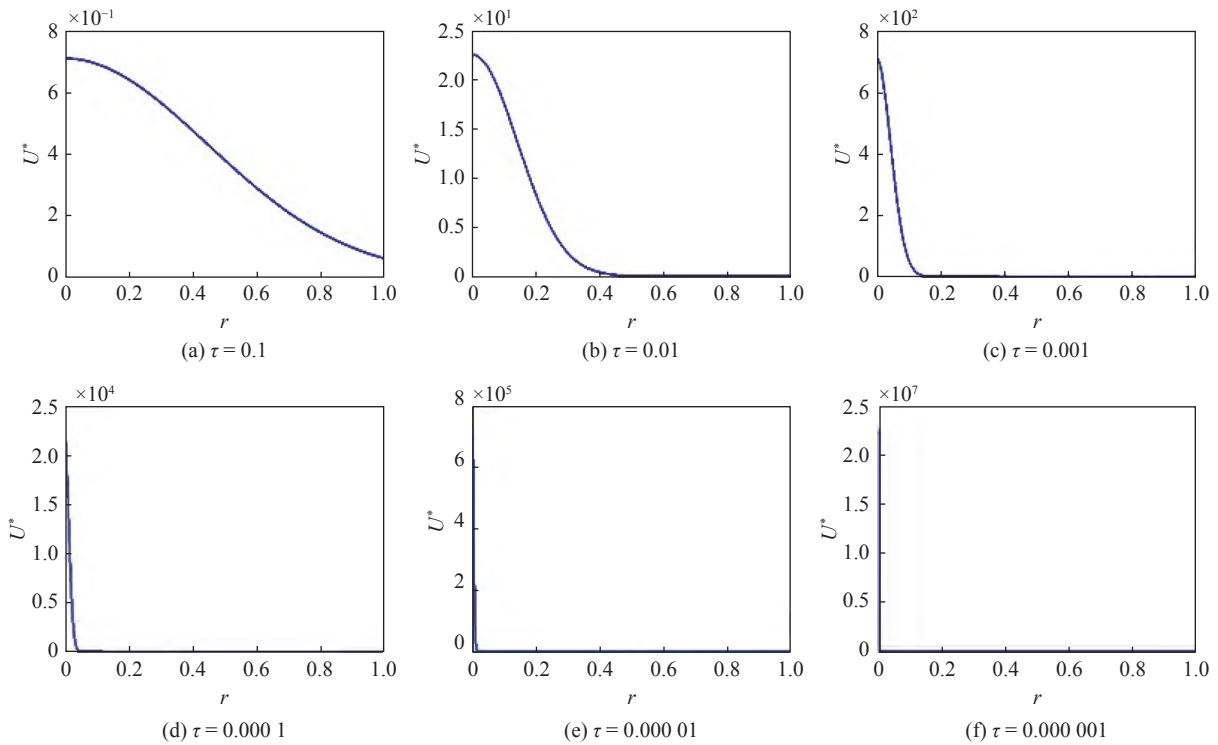
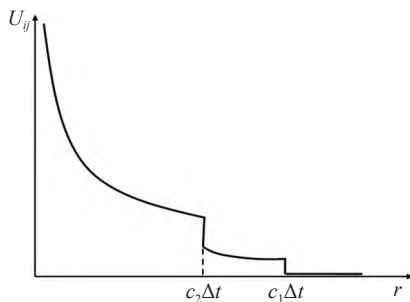


图 17 瞬态热传导时域基本解随时间的变化趋势

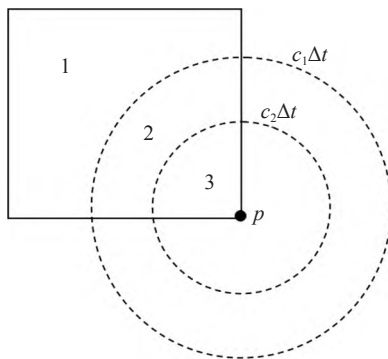
Fig. 17 The trend of time domain fundamental solutions for transient heat conduction over time

计算方法. 于是张见明等^[84-85] 提出了球面细分法, 该方法是通过一系列以源点为球心、半径呈指数级数

增长的球面来分割积分单元, 得到一系列扇形和环形子单元块 (如图 19(a) 所示一个平面细长单元, 源点在 3 个不同位置的球面细分结果以及如图 19(b) 所示三维单元, 源点在 3 个不同位置的球面细分结



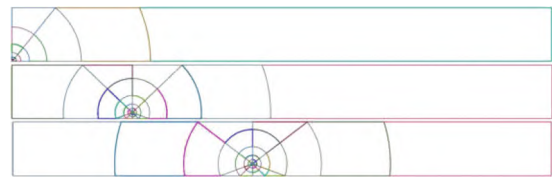
(a) 位移核函数示意图
(a) Displacement kernel function diagram



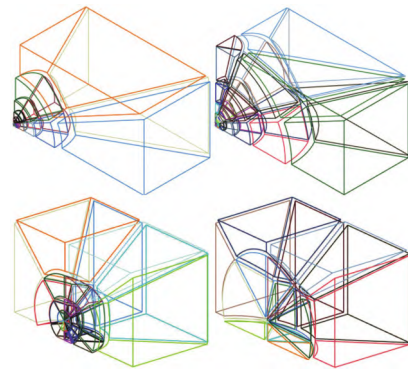
(b) 波动前沿示意图
(b) Wave front diagram

图 18 瞬态弹性动力学问题

Fig. 18 Transient elastodynamics problem



(a) 二维平面细长单元
(a) 2-D plane slender elements



(b) 三维长方体单元
(b) 3-D cuboid elements

图 19 球面细分

Fig. 19 Spherical subdivision

果). 由于球面细分是直接三维笛卡尔坐标系下进行的, 所以它适用于任何类型的单元. 球面细分中球的半径由源点到单元的最近和最远距离确定, 也可以由基本解的形状参数确定 (如瞬态热传导问题基本解中的 $4k\tau$, 弹性波基本解中的 $c_1\Delta t$ 和 $c_2\Delta t$). 通过特定算法, 在基本解的半径不变且半径系列大体按指数级数增大的情况下, 合并两个半径系列, 使得分割得到的扇形和环形子单元块在源点附近自动加密, 且满足基本解的特征面 (如弹性波基本解的间断面). 由于基本解主要是源点到场点的距离 r 的函数, 在同等精度下, 含基本解的积分在子块的环向上所需要的高斯积分点数将大大减少. 在径向方向上, 由

于球半径系列呈指数级数变化, 各个子块可以做到等精度高斯积分. 从总体上看, 也就是高斯积分点的分布达到最优状态, 因而可以得到最好的精度和最高的计算效率. 图 20 所示为平面细长单位源点位置, 表 1 给出了图 20 所示的细长单元在不同源点位置下 4 种方法的奇异积分误差对比结果, 通过对比可以发现球面细分法在数值积分上的高精度与稳定性.

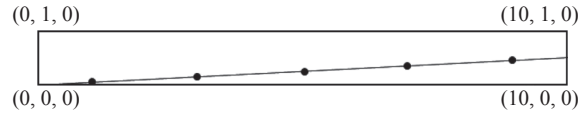


图 20 平面细长单元源点位置
Fig. 20 Source location of plane slender elements

表 1 平面细长单元奇异积分误差对比

Table 1 Error comparison of singular integral of plane slender elements

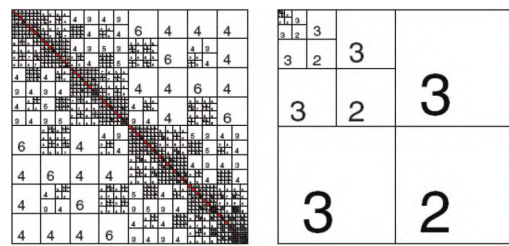
| Source node | Gaussian points | | | | Relative error | | | |
|-------------|--------------------|----------------|------------------|-----------------------|-------------------------------|---------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| | Distance transform | Sinh transform | Sinh+S transform | Spherical subdivision | Distance transform/ 10^{-3} | Sinh transform/ 10^{-3} | Sinh+S transform/ 10^{-3} | Spherical subdivision/ 10^{-3} |
| 0 | 484 | 484 | 512 | 499 | 5.1797 | 5.1089 | 1.1366 | 3.4709 |
| 1 | 484 | 484 | 512 | 522 | 0.11750 | 0.11750 | 0.72528 | 0.89188 |
| 2 | 576 | 576 | 648 | 584 | 1.6697 | 1.6694 | 3.6332 | 1.3552 |
| 3 | 576 | 576 | 512 | 542 | 6.5545 | 6.5547 | 2.7797 | 6.7369 |
| 4 | 576 | 576 | 648 | 584 | 3.2067 | 3.2078 | 7.1817 | 7.9095 |

4 快速算法

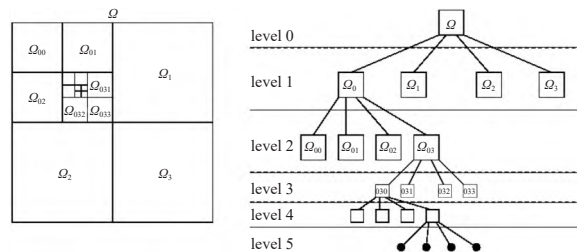
快速多极算法 (fast multipole method, FMM) 是由 Rokhlin^[34] 和 Greengard 等^[35] 提出的, 该方法结合了树结构以及对核函数进行多级展开和局部展开等技术, 采用树结构将单元离散系统分割为空间中的包元, 根据树结构的分级特性将离散系统的相互作用域分为近场和远场. 近场的矩阵系数直接进行单元积分计算, 而远场的矩阵系数则采用多级展开技术计算, 从而将计算复杂度从 $O(N^2)$ 降到 $O(N)$ 量级. 目前, FMM 已经在很多领域得到了成功的应用, 但是, 它也存在一些缺点: (1) FMM 依赖于核函数的展开, 其多级展开和局部展开过程复杂, 而且对于不同的物理问题没有统一的展开公式, 不能做到真正的黑箱操作; (2) FMM 不能很好地解决大规模问题中迭代求解过程的收敛性难题.

分级矩阵是由 Hackbusch 等^[36-38] 首次提出, 该方法通过将边界元中稠密的系数矩阵进行分级稀疏化表示 (分级操作如图 21 所示), 然后对稀疏矩阵进

行初代数运算, 如分级求逆 (inversion)、分级 LU 分解以及 QR 分解. 它是一种纯代数的操作方法, 通过



(a) 矩阵稀疏化
(a) Matrix sparsization



(b) 基于树结构的矩阵块
(b) Matrix blocks based on tree structure

图 21 分级矩阵

Fig. 21 Hierarchical matrix

在大规模迭代求解过程中利用分级矩阵的低精度的分级 LU 分解, 构造一个高效的预处理矩阵, 方便后期的方程的求解运算. 分级矩阵将边界元系数矩阵的存储量级从 $O(N^2)$ 降到了 $O(N \lg N)$, 而分级 LU 分解所需的计算量仅为 $O(N \lg^2 N)$, 从而实现了边界元法或边界面法大规模工程问题中的应用.

自适应交叉近似算法 (adaptive cross approximation, ACA) 是由德国学者 Bebendorf 等^[39-40] 根据俄罗斯学者 Tyrtshnikov^[86-87] 的伪骨架 (pesudo-skeleton) 近似算法提出的一种低秩近似算法. 自适应交叉近似算法 (ACA) 可以在给定精度下将分级矩阵中的远场稠密矩阵块分解为两个低秩矩阵的乘积 (称为低秩近似), 其过程如图 22 所示. 该算法可以将矩阵的存储规模降到自由度总数的弱线性量级 $O(N \lg N)$. 整个过程也只需要对矩阵进行纯代数操作, 不需要对核函数 (基本解) 进行级数展开. 因此, 自适应交叉近似算法 (ACA) 可以很好地实现程序的黑箱操作, 即只需要编写一个 ACA 算法程序, 在分析不同的物理问题 (如弹性力学问题、声波问题、电磁场问题等) 时都可以实现大规模问题的计算.

无论是 FMM 还是 ACA 其数学本质都是利用边界积分方程中基本解的渐进光滑特性, 对满足远场要求的低秩矩阵块进行低秩近似. 以三维位势问题的位势基本解为例, 其表达式如式 (32) 所示,

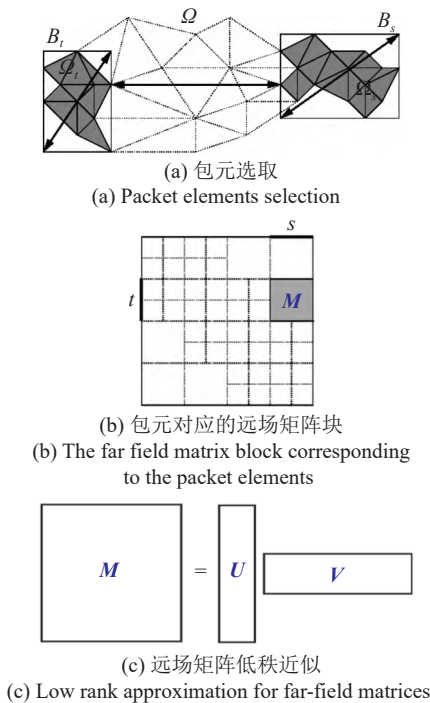


图 22 自适应交叉近似
Fig. 22 Adaptive cross approximation

P 和 Q 分别表示源点和场点, $|P-Q|$ 表示源点与场点之间的距离. 对应的基本解的函数图像如图 23 所示, 由图像可知, 当源点与场点之间的距离较远时 (如图 23 中的 β 之后), 函数值变化缓慢, 那么相邻的源点或场点对应的系数矩阵的行或列元素的线性相关性也会随之增大, 进而该远场矩阵块就可以表示成两个低秩矩阵的乘积形式, 降低矩阵的存储量. 因此, 在进行矩阵低秩近似之前, 首先要对系数矩阵进行远近场的划分, 划分后的矩阵如图 24 所示, 其中, 黑色矩阵块表示近场矩阵, 不做近似; 空白且标明秩的矩阵块表示远场矩阵, 这些矩阵可以进行低秩近似. 为了满足边界面法的需要, 基于自适应交叉近似算法, 张见明教授提出了根据节点几何信息选取骨架点的几何映射交叉近似算法 (geometric mapping cross approximation, GMCA) 和几何交叉近似算法^[88-89] (geometric cross approximation, GCA). 几何映射交叉近似算法是在两个包元几何中心的基础上建立投影面, 如图 25(a) 所示, 在该投影面上利用四叉树结构对投影点进行优先级处理, 根据优先级选出骨架点, 叶子的优先级编号如图 25(b) 所示, 根据骨架点进而

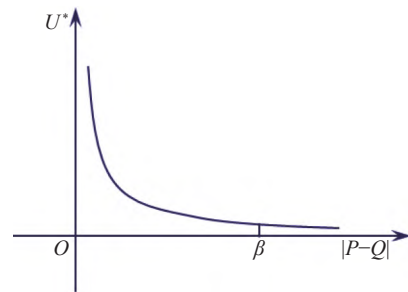


图 23 基本解函数图像
Fig. 23 Kernel function image

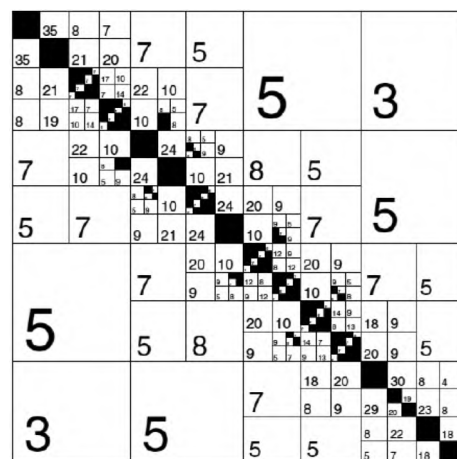
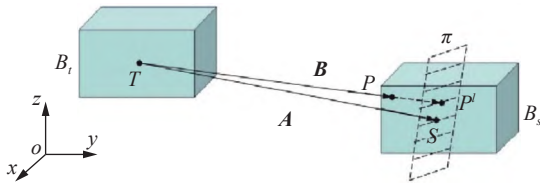


图 24 远近场矩阵划分示意图
Fig. 24 Diagram of far and near field matrix division



(a) 三维空间中的包元示意图

(a) Diagram of packet elements in 3-D

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 25 | 11 | 21 | 6 | 14 | 19 | 2 |
| 17 | 29 | 46 | 32 | 39 | 43 | 30 | 26 |
| 13 | 40 | 48 | 52 | 57 | 49 | 36 | 9 |
| 4 | 35 | 56 | 60 | 63 | 55 | 41 | 22 |
| 23 | 45 | 53 | 62 | 61 | 59 | 33 | 5 |
| 8 | 37 | 50 | 58 | 54 | 51 | 44 | 12 |
| 27 | 31 | 42 | 34 | 47 | 38 | 28 | 16 |
| 3 | 18 | 15 | 7 | 20 | 10 | 24 | 1 |

(b) 叶子的优先级编号示意图

(b) Diagram of priority numbering of leaves

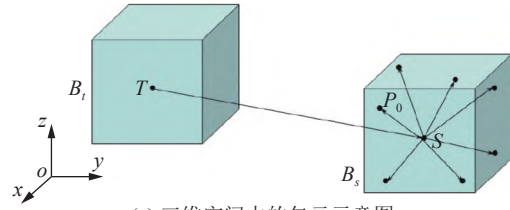
图 25 GMCA

Fig. 25 GMCA

可以确定线性无关的低秩矩阵. 但是, 在数值试验过程中发现 GMCA 具有位置敏感性以及存在计算效率方面的问题, 于是在 GMCA 的基础上提出了直接在包元的三维空间中选取骨架点的几何交叉近似算法. 在 GCA 中, 仍然是以包元几何中心为基础, 但是不需要建立投影关系 (GCA 包元如图 26(a) 所示), 而是根据包元最大边长建立八叉树结构, 然后设置叶子优先级, GCA 中叶子优先级的设置如图 26(b) 所示. 在确定优先级之后, 根据定义的参量选出最优节点, 再在最优节点中根据优先级选取骨架点

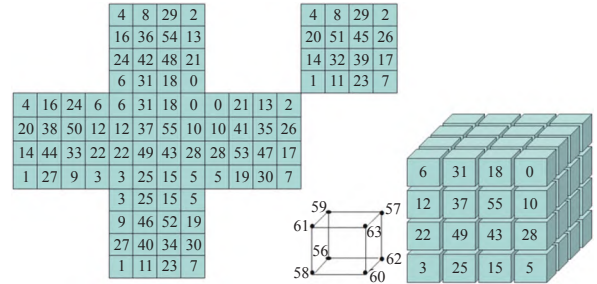
$$U^*(P, Q) := \frac{1}{4\pi|P-Q|} \quad (32)$$

图 27 给出了 9 种相对位置的包元分布. 表 2 给出了自适应交叉近似算法 (ACA)、几何映射交叉近似算法 (GMCA) 以及几何交叉近似算法 (GCA) 对选取的光滑核函数, 在 9 种相对位置包元情况下 (图 27), 形成的系数矩阵进行低秩近似的精度对比. 通过对比可以发现, 在选取相同数量骨架点的情况下, 3 种方法得到的近似结果精度相差不大, 但是 GMCA 近似精度不太稳定, 不过依然可以说明 GMCA 和 GCA 的有效性. 图 28 展示了在固定包元节点的情况下, 随着选取的骨架点数量的递增, 3 种方法低秩近似的误差逐渐减小, 证明了 GMCA 和



(a) 三维空间中的包元示意图

(a) Diagram of packet elements in 3-D



(b) 叶子的优先级编号示意图

(b) Diagram of priority numbering of leaves

图 26 GCA

Fig. 26 GCA

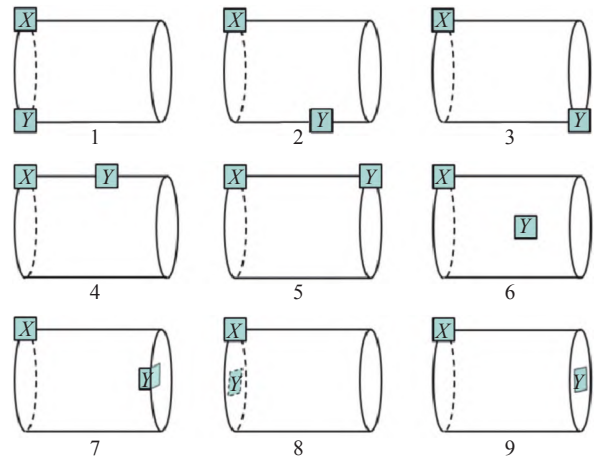


图 27 9 种相对位置的包元分布

Fig. 27 Nine packet element position distributions

表 2 ACA, GMCA 以及 GCA 3 种算法精度对比

Table 2 Comparison of accuracy of ACA, GMCA and GCA algorithms

| Case | m | n | ACA | | GMCA | | GCA | |
|------|-----|-----|-----|---------------------------|------|---------------------------|-----|---------------------------|
| | | | k | rel. err/10 ⁻⁵ | k | rel. err/10 ⁻⁵ | k | rel. err/10 ⁻⁵ |
| 1 | 149 | 154 | 5 | 2.488 | 5 | 1.753 | 5 | 1.167 |
| 2 | 192 | 154 | 5 | 2.398 | 5 | 2.981 | 5 | 1.471 |
| 3 | 149 | 154 | 5 | 12.47 | 5 | 1.918 | 5 | 1.251 |
| 4 | 192 | 154 | 6 | 4.102 | 6 | 11.15 | 6 | 1.233 |
| 5 | 154 | 154 | 8 | 4.865 | 8 | 1.155 | 8 | 0.5562 |
| 6 | 216 | 154 | 6 | 1.185 | 6 | 0.3452 | 6 | 0.2572 |
| 7 | 163 | 154 | 5 | 7.487 | 5 | 4.072 | 5 | 2.894 |
| 8 | 104 | 154 | 6 | 0.357 | 6 | 1.113 | 6 | 1.469 |
| 9 | 104 | 154 | 6 | 1.217 | 6 | 0.3215 | 6 | 0.2337 |

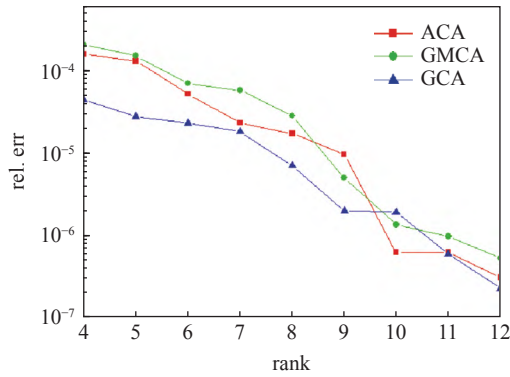
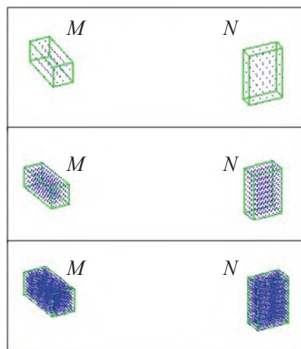
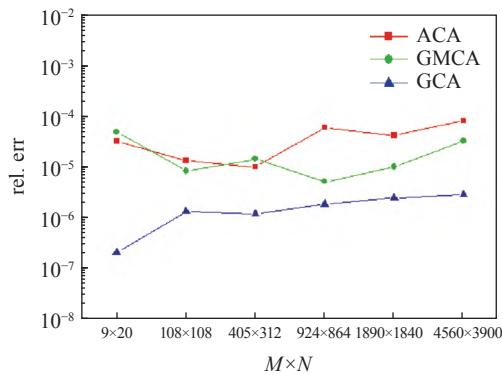


图 28 ACA, GMCA 以及 GCA 3 种算法收敛性对比
Fig. 28 Comparison of convergence of ACA, GMCA and GCA algorithms

GCA 的收敛性. 从图 29 中可以看出, 在包元相对位置不变但节点数逐渐递增的情况下, ACA 和 GMCA 的精度波动比较大, 而 GCA 的近似精度相对稳定, 且精度比较高, 说明了 GCA 对包元中节点分布的不敏感性.



(a) 含有不同节点数的包元
(a) Packet elements with different number of nodes



(b) 精度对比
(b) Accuracy comparison

图 29 低秩近似的稳定性

Fig. 29 Stability of low rank approximation

5 非连续网格

CAE 分析自动化的关键在于网格的自动生成,

但是现存的连续网格生成算法在遇到“脏”的几何模型时, 或多或少需要进行一定的几何修复, 难以做到从几何模型到网格模型的全自动化. 采用四/八叉树的方法生成非连续网格, 网格生成速度快, 实体内部多为规则的长方形或者正方体网格, 且无需预先生成边界网格, 当几何模型包含重叠、细缝和极短边等“噪音”时, 无需几何修复亦可以直接生成网格, 几乎不需要人工干预, 自动化程度最高. 但是由于有限元算法要求网格至少是连续的, 对于四/八叉树生成的非连续网格需要借助模板法过渡使其变成连续网格, 保证最终的网格不包含悬点如图 30 所示. 非连续网格应用的关键在于悬点的处理, 而基于连续网格的 FEM 无法有效地解决这一问题, 因此, 无法采用非连续网格进行求解, CAE 分析的自动化更是无从谈起. 双层插值方法通过非连续点处布置虚点的方式, 使其能够自然地模拟该处的连续以及分连续场, 为非连续网格的应用提供了理论基础. 此外, 非连续网格的树结构生成方法还具有以下优点:

- (1) 网格疏密控制更加灵活自由, 其相邻网格尺寸可相差一倍;
- (2) 若采用二叉树数据结构, 划分各向异性网格更加简单自然;
- (3) 可并行性好. 实现并行网格划分时, 结构的区域分解和区域网格细分的数据结构统一. 区域网格之间不需要拼接, 各个区域网格划分完全相互独立, 互不干涉.

本文采用二叉树结构来生成非连续网格, 网格的生成过程完全实现了自动化, 无需人工干预. 所有的数值算例均采用非连续网格进行求解. 下面将以风扇叶片为例, 介绍二叉树网格的生成算法, 主要包括 9 个主要步骤, 如图 31 所示. 关于二叉树网格详细的论述可参考文献 [90-91].

非连续网格下的双层插值单元布置如图 32 所示, 在悬点处通过布置两个虚点来满足相邻的单元构造. 一些二叉树网格的生成实例如图 33 ~ 图 35

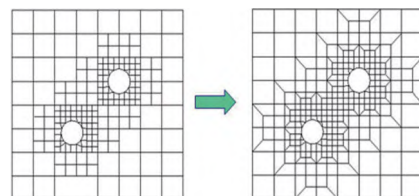


图 30 网格尺寸过渡

Fig. 30 Mesh size transition

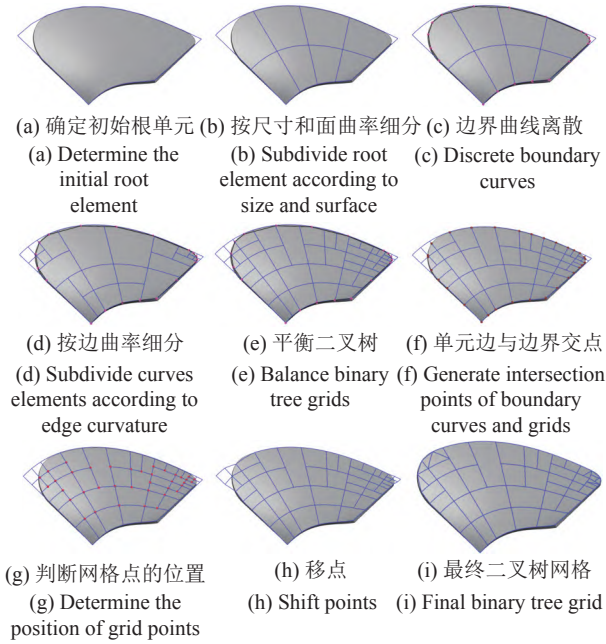


图 31 二叉树网格生成过程

Fig. 31 Binary tree grid generation process

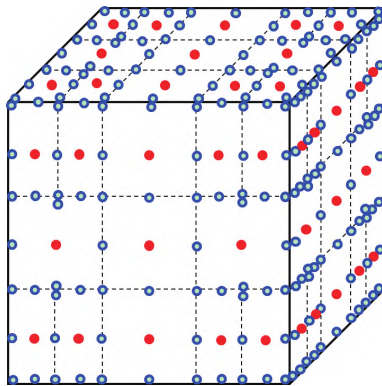


图 32 非连续网格下的双层插值单元布置

Fig. 32 Arrangement of dual interpolation elements on discontinuous meshes

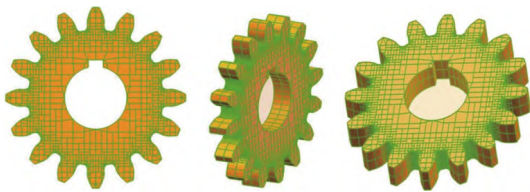


图 33 齿轮的非连续网格

Fig. 33 Discontinuous mesh of gear model

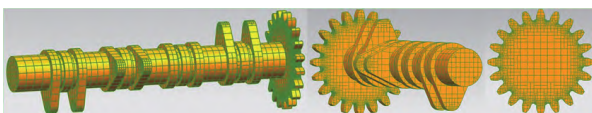


图 34 齿轮轴结构的非连续网格

Fig. 34 Discontinuous mesh of camshaft model

所示,从图上可以看出在几何突变处,网格会自动控制疏密,用以实现该处物理量的精确求解.通过与基

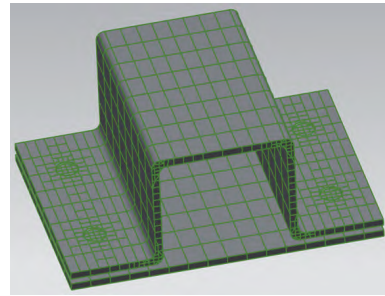


图 35 点焊结构的非连续网格

Fig. 35 Discontinuous mesh of spot welded model

于 HMLS 的双层插值结合,上述的非连续网格已经被成功应用于位势问题^[92]、声场问题^[93]、弹性问题^[94]以及多域问题^[95-96]的求解.

6 5aCAE 仿真软件

6.1 技术路线

在“完整实体分析”的概念基础上,团队成员通过数十载的探索与积累,已初步完成了 5aCAE 仿真软件(软件的 logo 如图 36 所示)的基础研发工作.

该软件可以实现复杂结构的高精度全自动的 CAE 分析,对于一些问题(如应力集中问题、奇异性问题、无限域问题)甚至比有限元软件具有更好的分析效果,为我国在 CAE 仿真软件方面赶超国际先进商用软件提供了技术平台.目前,5aCAE 仿真软件已经通过 UG 的二次开发集成到了 CAD 界面中,实现了与 UG 平台的无缝连接,同时还拥有完整的后处理显示功能.为提高程序的独立性、可移植性及软件的通用性,该软件只是在几何造型方面依赖于 UG 而其他子系统独立于 UG(如用户界面系统、文件系统等),通过设计一个独立的 Brep 数据结构,将 UG 的几何核心数据从内存复制到 CAE 分析进

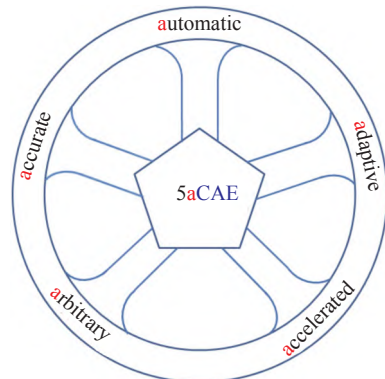


图 36 5aCAE 仿真软件 logo

Fig. 36 5aCAE simulation software logo

程,同时建立所有几何体的对应关系.未来,在国内 CAD 软件发展比较完善之后,只需做少量的修改就能融入到国产软件中,做到真正的国产自主.该软件的分析框架完全是自主研发的,所有的功能均采用 C++来实现.到目前为止,整个软件框架包含 131 个项目,近 3000 多个源文件,5000 多个类,代码总数近 120 万行.软件独具风格,框架包含结构类 (CStructure)、域类 (CDomain)、曲面类 (CSurface)、界面类 (CInterface)、表面类 (CFace)、快速多极算法类 (CFmm)、分级矩阵类 (CHMatrix)、自适应交叉近似类 (CAca)、分析问题定义类 (CProblem)、分析计算类 (CAnalysis)、计算流程管理类 (CSolution) 等两千多个,这些类将几何造型、视图和分析计算等功能完全融为一体.该软件现已具备基本问题的分析功能,可用于求解任意复杂结构的稳态、瞬态热传导问题、弹性静力学问题、裂纹扩展问题和声场问题.同时,接触问题、弹塑性问题以及弹性动力问题等功能模块目前还在完善过程中.我们计划在未来的十年内实现几何非线性问题、电磁场、电磁波问题、多物理耦合问题的求解以及基于 CPU/GPU 的并行计算等功能.之后可与大数据、云计算相结合,形成一套可与国际商用软件相抗衡的云端 CAE 分析软件.

软件操作界面相对简单,对用户比较友好,不仅具有比国际主流商用软件(如 ABAQUS, NASTRAN, ANSYS 等)更高的计算精度和效率,而且还具有以下不同于现有 CAE 软件的全新特性.使用者不需要懂得计算力学专门知识,只需具备材料力学知识;不需要选择单元类型,只需根据实际情况定义材料、载荷和边界约束即可;施加约束和载荷也是在 CAD 的环境中完成,且都是直观地施加在几何体上;输入的信息极少,只是物理问题定义,材料性质,边界条件等最基本的参数等.整体操作面板如图 37 所示.所有按钮的功能相比于 ABAQUS 和 ANSYS 更加简洁明了.分析步骤与其他商业软件相同,包括定义材料参数、分配边界条件、定义问题类型、一键式网格划分(也可以详细定义尺寸和方法)、提交问题分析以及后处理结果显示.除此之外,在“帮助”栏中集成了一些检查功能,帮助用户选择存在问题的目标面、单元以及节点以供查看.在可视化软件的基础上,自主开发了能显示各种物理场云图分布的后处理程序.

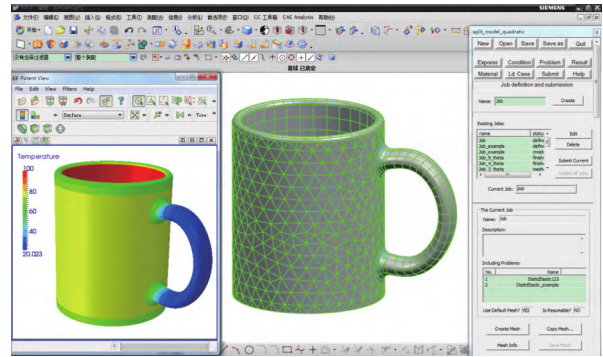


图 37 “5aCAE 仿真软件”用户界面

Fig. 37 5aCAE simulation software user interface

6.2 软件算例

6.2.1 弹性静力学问题

由于建模过程中的布尔运算,风扇模型产生了几何“噪声”如图 38(a) 所示的短边.“5aCAE 仿真软件”可以在此模型下自动生成非连续的网格,不需要几何修复或简化等人工干预.同时,边界条件(位移

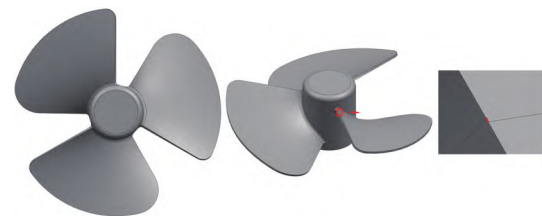
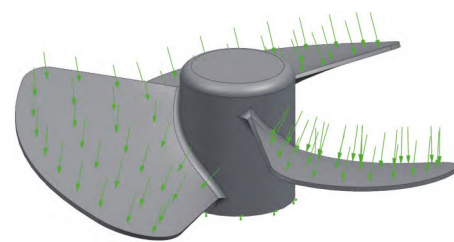
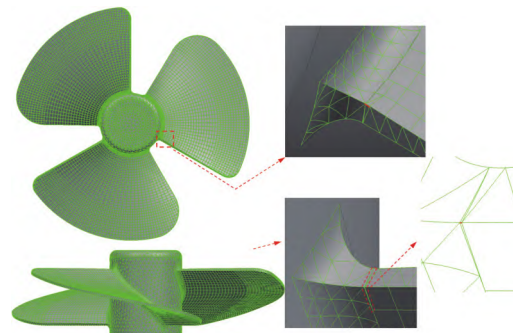
(a) 几何模型
(a) Geometric model(b) 边界条件
(b) Boundary conditions(c) 非连续网格
(c) Discontinue mesh

图 38 风扇静力学分析

Fig. 38 Static analysis of fan

面力边界条件) 均直观地直接施加到对应的几何面上如图 38(b) 所示. 虽然网格中存在质量较差的单元, 如图 38(c) 所示及其狭长的三角形单元, 但“5aCAE 仿真软件”仍然可以进行较为准确的应力分析. 然而, 有限元法的收敛性在很大程度上取决于单元的质量, 在存在上述单元的情况下, 要得到如此可观的应力结果对有限元软件来说将是一个挑战. 等值线图 39 和图 40 分别给出了“5aCAE 仿真软件”采用 17472 个源点与 ABAQUS 采用 2232109 个节点的位移和 von-Mises 的计算结果对比. 从中可以看出, “5aCAE 仿真软件”在采用较少节点的情况下就可以得到与 ABAQUS 采用上百万自由度相当的分析结果.

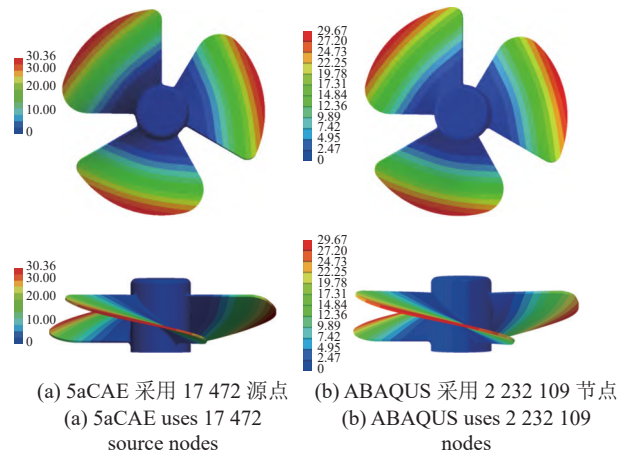


图 39 风扇位移云图
Fig. 39 Fan displacement contours

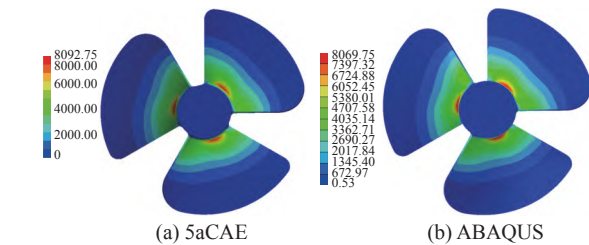


图 40 风扇 von-Mises 应力云图
Fig. 40 Fan von-Mises stress contours

6.2.2 稳态热传导问题

从图 41(a) 可以看出, 高脚杯薄壁的厚度仅为 0.4 mm, 其尺寸为高脚杯最大尺寸的 0.26%. 该算例采用非连续网格进行计算, 如图 41(b) 所示. 选择该模型的目的是展示“5aCAE 仿真软件”在分析薄壁结构的热传导问题方面的能力. 边界条件如下: 高脚杯内盛满温度为 $T = 100\text{ }^\circ\text{C}$ 的热水, 高脚杯外壁与空气直接接触. 考虑对流边界条件, 对流系数 $h = 0.8$, 环境温度 $u = 23.0\text{ }^\circ\text{C}$, 导热系数 $k = 7.2\text{ kJ}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$. 图 42

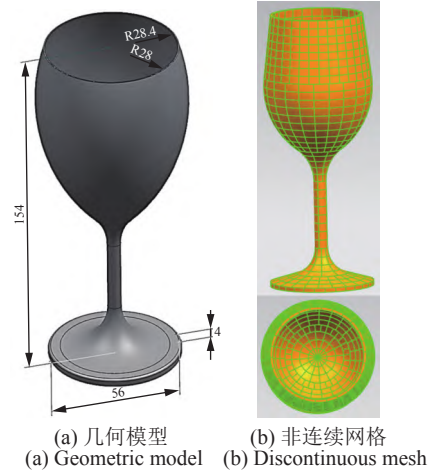


图 41 高脚杯稳态热分析

Fig. 41 Steady-state thermal analysis of goblet

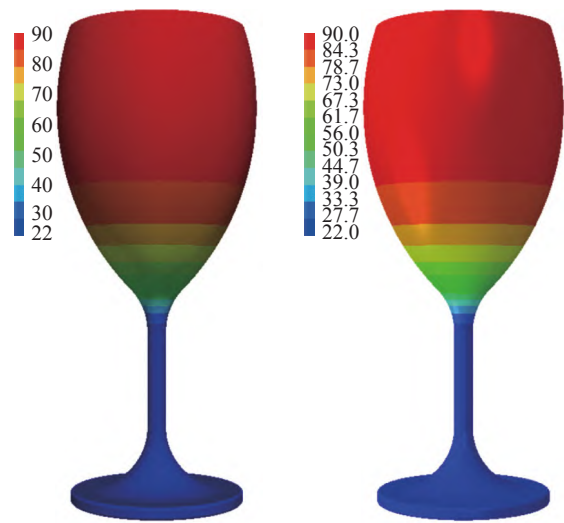


图 42 高脚杯温度分布云图
(a) 5aCAE 采用 7236 源点 (b) ABAQUS 采用 712 172 节点
(a) 5aCAE uses 7236 source nodes (b) ABAQUS uses 712 172 nodes

图 42 Goblet temperature distribution contours

中的温度分布云图分别展示了“5aCAE 仿真软件”采用 7236 个源节点与 ABAQUS 采用 712172 个节点的温度对比, 从图中可以看出两者的结果基本一致, 因此可以表明“5aCAE 仿真软件”在分析稳态热传导问题方面的能力.

6.2.3 瞬态热传导问题

该算例源于真实的工程案例, 大坝的几何模型如图 43 所示. 大坝的整个浇筑过程采用多域的方式进行瞬态热传导分析. 该分析过程共设置了 1260 个时间步, 导热系数 $k = 10\text{ kJ}/(\text{m}\cdot\text{h}\cdot^\circ\text{C})$, 热扩散率 $a = 0.004\text{ m}^2/\text{h}$, 环境温度 $u = 0\text{ }^\circ\text{C}$, 混凝土绝热温升. 采用“5aCAE 仿真软件”对坝体和基岩的温度分布进行时长为 9 a 的瞬态热分析图 44(a) ~ 图 44(d) 给出了

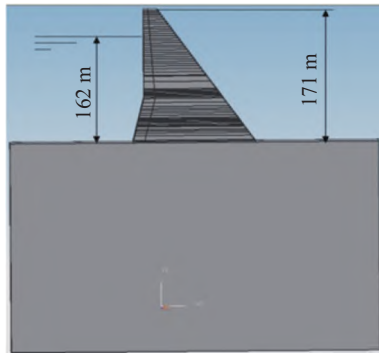


图 43 混凝土重力坝

Fig. 43 Concrete gravity dam model

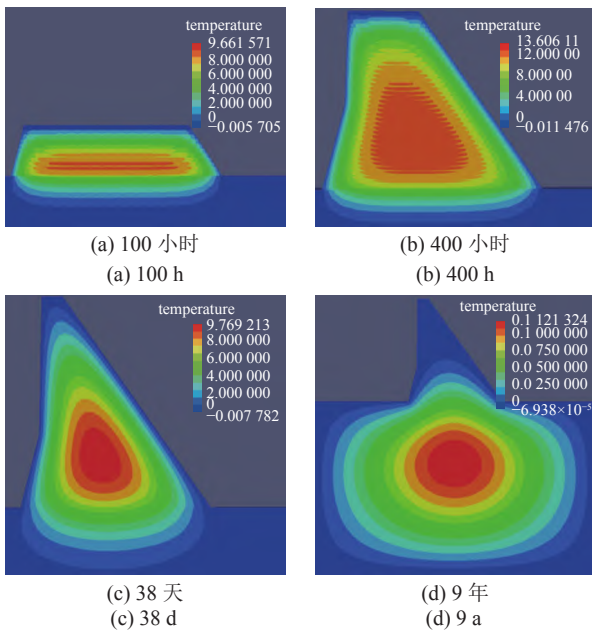


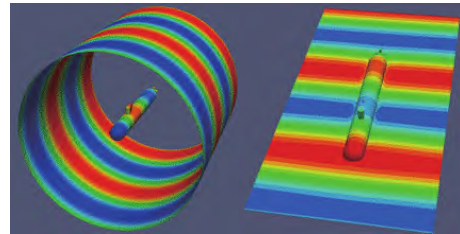
图 44 混凝土重力坝瞬态热传导云图

Fig. 44 Transient heat transfer contours of concrete gravity dam

第 100 小时、第 400 小时、第 38 天和第 9 年的瞬态热分布图. 该数值算例成功模拟了大坝的自然冷却过程, 表明“5aCAE 仿真软件”在工程背景问题方面的应用价值, 同时, 该功能也可以延伸至增材制造过程的仿真分析.

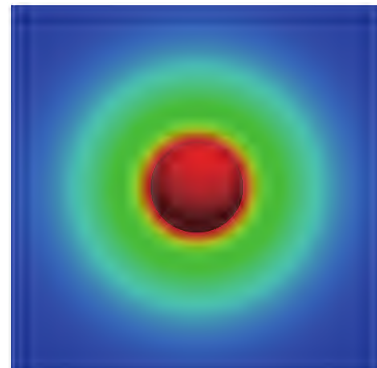
6.2.4 声场问题

潜艇和球体的声压分布及其外声场分布如图 45 所示. 第 1 个算例为潜艇在一束单位幅值平面入射波作用下的外声场声压分布, 入射方向正对潜艇, 水的密度给定为 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, 声在水中的传播速度给定为 $c = 1500 \text{ m/s}$. 第 2 个算例为振动球的辐射声压分布, 振速 $v_0 = 1 \text{ m/s}$, 空气的密度给定为 $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$, 声在空气中的传播速度给定为 $c = 340 \text{ m/s}$. “5aCAE 仿真软件”中的快速算法可以实现



(a) 潜艇声压分布云图

(a) Submarine sound pressure distribution contour



(b) 球声压分布云图

(b) Contour of spherical sound pressure distribution

图 45 外部声场问题

Fig. 45 Exterior acoustic problem

大规模声学问题的快速求解.

6.2.5 断裂问题

由于边界积分方程中基本解的奇异性, 边界法能够自然地模拟裂纹尖端的奇异性, 因而比有限元法更适合分析断裂问题, 而且在边界法中裂纹面是真实存在, 没有引入人为的假设和近似. 此外, 裂纹处出现的奇异积分难题可以用本文中球面细分的方法得到很好的解决. 在断裂力学问题中, 应力强度因子的计算作为其研究的主要问题, 是进一步研究裂纹扩展并进行寿命估计的基础. 本文目前工作侧重于应力强度因子的计算, 后续工作结合变网格技术, 可以在模拟裂纹扩展中避免整体网格的重新划分和加密.

下面这个算例考察的是带裂纹的紧支试件受到拉伸测试作用的问题, 其几何尺寸如图 46 所示, 非连续网格如图 47 所示. 图 48 为“5aCAE 仿真软件”采用 5048 个源节点和 ABAQUS 采用 1150071 个节点的位移变形云图, 两者结果基本一致, 最大位移误差仅为 0.66%. 图 49 为采用“5aCAE 仿真软件”计算得到的裂纹前沿上的正则化应力强度因子 KI , 该结果符合奇异性规律. 该算例充分说明了“5aCAE 仿真软件”在求解复杂单边裂缝结构时的正确性.

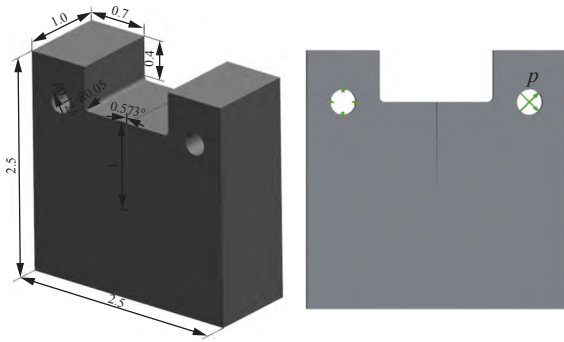


图 46 带裂纹的紧支试件

Fig. 46 Tight-supported specimen model with cracks

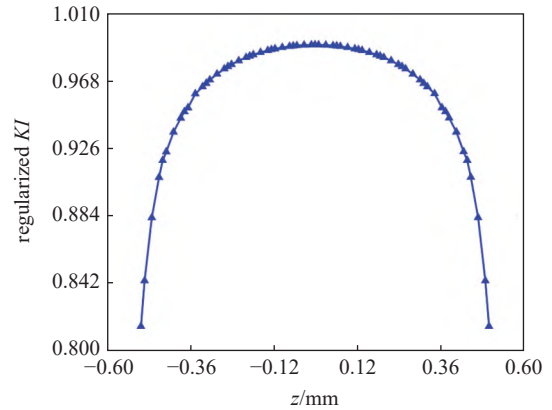


图 49 紧支试件裂纹前沿正则化应力强度因子 KI

Fig. 49 Regularized stress intensity factor KI at crack front of tight-supported specimen

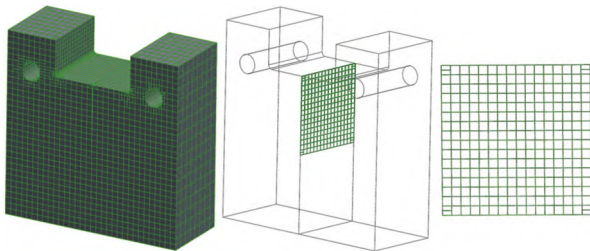
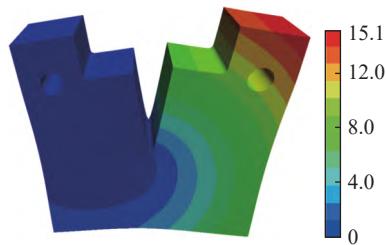
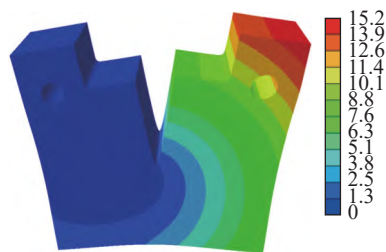


图 47 二叉树网格

Fig. 47 Binary tree grids



(a) 5aCAE 采用 5084 个源点
(a) 5aCAE uses 5084 source nodes



(b) ABAQUS 采用 1 150 071 个节点
(b) ABAQUS uses 1 150 071 nodes

图 48 紧支试件位移云图

Fig. 48 Displacement contours of tight-supported specimens

7 结论

本文系统介绍了双层插值边界面法的发展概况. 边界面法成功地避免了几何近似带来的误差, 使得所有的几何数据均取自实体边界, 大大提高了边界元法的计算精度, 实现了 CAD 模型到 CAE 计算模型无缝连接, 为 CAD/CAE 一体化发展扫除了障

碍. 双层插值的出现统一了传统的连续与非连续单元, 虚节点的引入使其能够自然地模拟连续与非连续场. 经过两个阶段的发展 (从 DiBFM-MLS 到 DiBFM-HMLS 演化) 双层插值的功能更加完善, 有效地解决了以往算法在小特征处插值而遗留的问题, 丰富了插值理论, 并充分发挥了边界元允许试函数不连续这一优势. 为解决双层插值边界面法在奇异以及近奇异积分方面存在的稳定性、效率以及准确性方面的难题, 提出了对任意基本解类型、任意单元形状、任意源点位置都能高效高质量划分积分单元的球面细分法, 并在处理含有时域基本解的奇异积分和突变函数积分方面得到了良好的数值结果. 在提升计算效率方面, 提出了基于几何实体的几何映射交叉近似算法和几何交叉近似算法. 这两种快速算法能够准确地对双层插值边界面法中的远场矩阵做出近似, 有效降低系数矩阵的储存量. 通过不同类型的算例, 进一步体现了几何交叉近似算法对节点的位置不敏感性以及数值结果的稳定性. 基于二叉树结构的非连续网格解决了自动化 CAE 分析在网格划分方面的难题, 对于任意复杂几何模型, 在不做模型简化与几何修复的情况下亦可以做到网格的自动生成, 这是在网格方面的一大创新, 而上述的双层插值边界面法又从理论方面为非连续网格的成功应用提供了保证. 所有的研究已构成一套完整的理论体系, 相辅相成, 其目的均在于开发国产自主的“5aCAE 仿真软件”. 不同于国际商业软件, 该软件完全基于边界元理论, 并在部分理论以及网格上有所改进. 软件操作简单, 避免使用抽象单元, 并且, 所有分析均基于完整实体, 最重要的是它是一款在实现

CAD/CAE 一体化以及 CAE 分析的自动化方面颇具潜力的软件. 虽然, 目前该软件只具有基础分析功能, 只能用于分析如弹性静力学问题、稳态热传导问题、瞬态热传导问题、断裂问题、接触问题、声场问题等(其可靠性已在该类型的问题中得到了验证), 但是, 后续基于 CPU/GPU 的并行计算以及快速算法实现后, 有望在航空领域、海洋领域、车辆工程等领域得到应用.

参 考 文 献

- Hughes TJR, Cottrell JA, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(39): 4135-4195
- Wang PB, Yao ZH. Fast multipole DBEM analysis of fatigue crack growth. *Computational Mechanics*, 2006, 38: 223-233
- 董春迎. 磁电弹介质断裂问题的边界元分析. 北京力学学会第 13 届学术年会论文集, 2007, 2: 100-101 (Dong Chunying. Fracture analysis in magnetoelastoelectric media by BEM. The 13th academic Annual Meeting of Beijing Mechanics Society, 2007, 2: 100-101 (in Chinese))
- 周焕林, 牛忠荣, 王秀喜. 薄体位势问题边界元法中的解析积分算法. *力学季刊*, 2003, 24(3): 319-326 (Zhou Huanlin, Niu Zhongrong, Wang Xiuxi. An analytical integral algorithm in BEM for potential problem with thin bodies. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2003, 24(3): 319-326 (in Chinese))
- 陈海波, 金建峰, 张培强等. Multi-Variable Non-Singular BEM for 2-D Potential Problems. *清华大学学报: 自然科学版*, 2005, 10: 43-50 (Chen Haibo, Jin Jianfeng, Zhang Peiqiang, et al. Multi-Variable Non-Singular BEM for 2-D Potential Problems. *Tsinghua Science and Technology*, 2005, 10: 43-50 (in Chinese))
- Ma H, Kamiya N. A general algorithm for the numerical evaluation of nearly singular boundary integrals of various orders for two- and three-dimensional elasticity. *Computational Mechanics*, 2002, 29: 277-288
- Gu JL, Zhang JM, Li GY. Isogeometric analysis in BIE for 3-D potential problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2012, 36(5): 858-865
- Gu JL, Zhang JM, Sheng XM. The boundary face method variable approximation B-spline basis function. *International Journal of Computational Methods*, 2013, 9(1): 1240009
- 郭新强, 张见明, 覃先云等. 基于黎曼度量参数曲面四边形网格生成方法及 UG 实现. *图学学报*, 2012, 33(3): 17-23 (Guo Xinqiang, Zhang Jianming, Qin Xianyun, et al. Surface quadrilateral mesh generation based on Riemannian metric and its implementation in UG-NX. *Journal of Graphics*, 2012, 33(3): 17-23 (in Chinese))
- Qin XY, Zhang JM, Xie GZ, et al. A general algorithm for the numerical evaluation of nearly singular integrals on 3D boundary element. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 235(14): 4174-4186
- 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用. *力学进展*, 2009, 39(1): 1-36 (Zhang Xiong, Liu Yan, Ma Shang. Meshfree method and their applications. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(1): 1-36 (in Chinese))
- Zhang J, Yao Z, Li H. A hybrid boundary node method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53(4): 751-763
- Lu CJ, Zhang JM, Han L. 2 Treatment for geometry noise in mesh generation for welded tubular Y-joints in the BFM. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 2014, 56: 459-470
- Xie GZ, Zhang JM. Application of exponential transformation coupled with adaptive subdivision technique for nearly singular boundary integrals in elasticity problems. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 2014, 56: 391-401
- Guo SP, Li GY, Zhang JM. Multiple reciprocity boundary face method for transient heat conduction in functionally graded materials. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 2014, 56: 167-176
- Li Y, Zhang JM. A comparative study of time domain BEM for 3D elastodynamic analysis. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 2014, 56: 503-514
- Huang C, Zhang JM. Automatic hybrid mesh generation for the boundary face method. *WIT Transactions on Modeling and Simulation*, 2014, 56: 139-150
- Xie GZ, Zhang JM, Huang C, et al. Calculation of nearly singular boundary element integrals in thin structures using an improved exponential transformation. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2013, 94(2): 139-157
- Xie GZ, Zhou FL, Zhang JM, et al. New variable transformations for evaluating nearly singular integrals in 3D boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, 37: 1169-1178
- Xie GZ, Zhang JM, Huang C, et al. A direct traction boundary integral equation method for three-dimension crack problems in infinite and finite domains. *Computational Mechanics*, 2014, 53(4): 575-586
- Xie GZ, Zhang JM, Dong YQ, et al. An improved exponential transformation for nearly singular boundary element integrals in elasticity problems. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, 51: 1322-1329
- 张见明, 余列祥, 刘路平. 基于 GPU 加速的边界面法正则积分的研究. *湖南大学学报 (自然科学版)*, 2013, 40(3): 41-45 (Zhang Jianming, Yu Liexiang, Liu Luping. Research on regular integration in boundary face method based on GPU-accleration. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2013, 40(3): 41-45 (in Chinese))
- Zhong YD, Zhang JM, Dong YQ, et al. A serendipity triangular patch for evaluating weakly singular boundary integrals. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2016, 69: 86-92
- Dong YQ, Zhang JM, Xie GZ, et al. A general algorithm for evaluating domain integrals in 2D boundary element method for transient heat conduction. *International Journal of Computational Methods*, 2015, 12(2): 1550010
- Dong YQ, Zhang JM, Xie GZ, et al. A general algorithm for the numerical evaluation of domain integrals in 3D boundary element method for transient heat conduction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, 51: 30-36
- Dong YQ, Lu CJ, Li Y, et al. Accurate numerical evaluation of domain integrals in 3D boundary element method for transient heat conduction problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, 60: 89-94
- Zhang JM, Lu CJ, Zhang XX, et al. An adaptive element subdivision method for evaluation of weakly singular integrals in 3D BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, 51: 213-219
- Wang XH, Lu CJ, Zhou FL, et al. Acoustic problems analysis of 3D solid with small holes by fast multipole boundary face method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, 37(12): 1703-

- 1711
- 29 Wang XH, Zhang JM, Zheng XS, et al. Half space acoustic problems analysis by fast multipole boundary face method. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2013, 93(1): 69-90
- 30 Zhou FL, Xie GZ, Zhang JM, et al. Transient heat conduction analysis of solids with small open-ended tubular cavities by boundary face method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, 37(3): 542-550
- 31 Gu Y, Golub MV, Fan C. Analysis of in-plane crack problems using the localized method of fundamental solutions. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, 256: 107994
- 32 谷岩, 张耀明. 双材料界面裂纹复应力强度因子的正则化边界元法. *力学学报*, 2021, 53(4): 1049-1058 (Gu Yan, Zhang Yaoming. Boundary element analysis of complex stress intensity factors of bimaterial interface cracks. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(4): 1049-1058 (in Chinese))
- 33 Gu Y, Lin J, Wang F. Fracture mechanics analysis of bimaterial interface cracks using an enriched method of fundamental solutions: Theory and MATLAB code. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2021, 116: 103078
- 34 Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *J Comput Phys*, 1985, 60: 187-207
- 35 Greengrad L, Rokhlin V. A fast algorithm for particles simulations. *J Comput Phys*, 1987, 73: 325-348
- 36 Borm S, Grasedyck L, Hackbusch W. Introduction to hierarchical matrices with applications. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2003, 27: 405-422
- 37 Hackbusch W. A sparse matrix arithmetic based on H-matrices. Part I. Introduction to H-matrices. *Computing*, 1999, 62: 89-108
- 38 Hackbusch W, Khoromskij B. A sparse matrix arithmetic based on H-matrices. Part II. Application to multi-dimensional problems. *Computing*, 2000, 64: 21-47
- 39 Bebendorf M. Approximation of boundary element matrices. *Numer. Math*, 2000, 86: 565-589
- 40 Bebendorf M, Rjasanov S. Adaptive low-rank approximation of collocation matrices. *Computing*, 2003, 70: 1-24
- 41 Zhang JM, Qin XY, Han X, et al. A boundary face method for potential problems in three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 80: 320-337
- 42 张见明. 基于边界面法的完整实体应力分析理论与应用. *计算机辅助工程*, 2010, 19: 5-10 (Zhang Jianming. Theory and application of stress analysis on complete solids based on boundary face method. *Computer Aided Engineering*, 2010, 19: 5-10 (in Chinese))
- 43 Qin XY, Zhang JM, Li GY, et al. An element implementation of the boundary face method for 3D potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2010, 34: 934-943
- 44 覃先云, 张见明, 李光耀. 边界面法分析三维实体线弹性问题. *固体力学学报*, 2011, 32(5): 500-506 (Qin Xianyun, Zhang Jianming, Li Guangyao. Analysis of 3D linear elasticity problems directly on geometric model with the boundary face method. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, 32(5): 500-506 (in Chinese))
- 45 Gu JL, Zhang JM, Sheng XM, et al. B-spline approximation in boundary face method for three dimensional linear elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, 35: 1159-1167
- 46 Gu JL, Zhang JM, Sheng XM. The boundary face method with variable approximation by b-spline basis function. *International Journal of Computational Methods*, 2012, 9(1): 1240009
- 47 Zhou FL, Zhang JM, Sheng XM, et al. Shape variable radial basis function and its application in dual reciprocity boundary face method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, 35: 244-252
- 48 Zhou FL, Zhang JM, Sheng XM, et al. A dual reciprocity boundary face method for 3D non-homogeneous elasticity problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2012, 36: 1301-1310
- 49 Li GY, Guo SP, Zhang JM, et al. Transient heat conduction analysis of functionally graded materials by a multiple reciprocity boundary face method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, 60: 81-88
- 50 Xie GZ, Zhang JM, Qin XY, et al. New variable transformations for evaluating nearly singular integrals in 2D boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, 35: 811-817
- 51 Qin XY, Zhang JM, Liu LP, et al. Steady-state heat conduction analysis of solids with small open-ended tubular holes by BFM. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2012, 55: 6846-6853
- 52 Guo SP, Zhang JM, Li GY. Three dimensional transient heat conduction analysis by Laplace transformation and multiple reciprocity boundary face method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, 37(1): 15-22
- 53 He JP, Zhou FL, Zhang JM, et al. Application of the boundary face method for thermal analysis in dam construction. *Australian Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 11(1): 11-18
- 54 Zhang JM, Huang C, Lu CJ, et al. Automatic thermal analysis of gravity dams with fast boundary face method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2014, 41: 111-121
- 55 Zhou FL, Li Y, Zhang JM, et al. A time step amplification method in boundary face method for transient heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, 84: 671-679
- 56 Huang C, Zhang JM, Qin XY, et al. Stress analysis of solids with open-ended tubular holes by BFM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2012, 36: 1908-1916
- 57 Li GY, Guo SP, Zhang JM, et al. Complete solid buckling analysis with boundary face method. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2014, 98(5): 487-508
- 58 Wang XH, Zhang JM, Zhou FL, et al. An adaptive fast multipole boundary face method with higher order elements for acoustic problems in three-dimension. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, 37: 114-152
- 59 Wang XH, Zhang JM, Zhou FL. Application of the boundary face method to solve the 3D acoustic wave problems. *Australian Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 11(1): 21-28
- 60 Zhang JM, Lu CJ, Li Y, et al. A domain renumbering algorithm for multi-domain boundary face method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2014, 44: 19-27
- 61 张见明, 李湘贺, 陆陈俊等. 多域边界面法在稳态热传导问题中的应用. *湖南大学学报 (自然科学版)*, 2014, 41(5): 58-64 (Zhang Jianming, Li Xianghe, Lu Chenju, et al. Application of multi-domain boundary face method in steady state heat conduction. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2014, 41(5): 58-64 (in Chinese))
- 62 Li Y, Zhang JM, Xie GZ, et al. Time-domain BEM analysis for three-dimensional elastodynamic problems with initial conditions. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2014, 101(3): 187-206
- 63 Li Y, Zhang JM, Yu LX, et al. GPU-accelerated regular integration and singular integration in boundary face method. *Australian Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 13(3): 163-171
- 64 Zheng XS, Zhang JM, Zhang K, et al. Boundary face method for 3D contact problems with non-conforming contact discretization. *Engineering*

- earing Analysis with Boundary Elements, 2016, 63: 40-48
- 65 Shu XM, Zhang JM, Han L, et al. A surface-to-surface scheme for 3D contact problems by boundary face method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2016, 70: 23-30
- 66 Zhang JM, Lin WC, Dong YQ, et al. A double-layer interpolation method for implementation of BEM analysis of problems in potential theory. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 51: 250-269
- 67 林威承. 边界面法中近奇异积分技术和单元插值方法的研究. [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2020 (Lin Weicheng. Research on nearly singular integral technique and element interpolation method in boundary face method. [PhD Thesis]. Changsha: Hunan University, 2020 (in Chinese))
- 68 何葵. 埃尔米特型双层插值边界面法在自动 CAE 分析中的应用研究. [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2021 (He Rui. Application of hermite-type dual interpolation boundary face method in automatic CAE analysis. [PhD Thesis]. Changsha: Hunan University, 2021 (in Chinese))
- 69 He R, Zhang JM, Su LM, et al. A new implementation of DRM with dual interpolation boundary face method for Poisson equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, 121: 21-30
- 70 Zhang JM, Zhong YD, Dong YQ, et al. Expanding element interpolation method for analysis of thin-walled structures. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2018, 86: 82-88
- 71 Zhang JM, Lin WC, Dong YQ. A dual interpolation boundary face method for elasticity problems. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2019, 73: 500-511
- 72 Zhang JM, Ju CM, Wen PH, et al. A dual interpolation boundary face method for 3D elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, 122: 102-116
- 73 Zhang JM, Dong YQ, Ju CM, et al. A new singular element for evaluating stress intensity factors of V-shaped notches under mixed-mode load. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2018, 93: 161-166
- 74 Zhang JM, Dong YQ, Lin WC, et al. A singular element based on dual interpolation BFM for V-shaped notches. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 71: 208-222
- 75 Zhang JM, Shu XM, Trevelyan J, et al. A solution approach for contact problems based on the dual interpolation boundary face method. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 70: 643-658
- 76 Zhang JM, Chi BT, Lin WC, et al. A dual interpolation boundary face method for three-dimensional potential problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2019, 140: 862-876
- 77 Zhang JM, Lin WC, Shu XM, et al. A dual interpolation boundary face method for exterior acoustic problems based on the Burton-Miller formulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, 113: 219-231
- 78 Yang L, Zhang JM, He R, et al. A dual interpolation precise integration boundary face method to solve two-dimensional transient heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, 122: 75-84
- 79 Zhang JM, Yang L, Liu YJ, et al. A dual interpolation Galerkin boundary face method for potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, 117: 157-166
- 80 Zhang JM, He R, Chi BT, et al. A dual interpolation boundary face method with Hermite-type approximation for potential problems. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, 81: 457-472
- 81 Zhang JM, He R, Lin WC, et al. A dual interpolation boundary face method with Hermite-type approximation for elasticity problems. *European Journal of Mechanics/A Solids*, 2020, 82: 104005
- 82 Huang C, Zhang JM. A quality and efficient tetrahedral mesh generation method. *Australian Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 11(2): 121-130
- 83 Zhuang C, Zhang JM, Qin XY, et al. Integration of subdivision method into boundary element analysis. *International Journal of Computational Methods*, 2012, 9(1): 1240019
- 84 Zhang JM, Wang P, Lu CJ, et al. A spherical element subdivision method for the numerical evaluation of nearly singular integrals in 3D BEM. *Engineering Computations*, 2017, 34: 2074-2087
- 85 Zhang JM, Ju CM, Eduardo D, et al. A binary-tree subdivision method for evaluation of singular integrals in 3D BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2019, 103: 80-93
- 86 Tyrtysnikov E. Mosaic-skeleton approximations. *Calcolo*, 1996, 33: 47-57
- 87 Tyrtysnikov E. Incomplete cross approximation in the mosaic-skeleton method. *Computing*, 2000, 64: 367-380
- 88 Zhang JM, Zheng XS, Lu CJ, et al. A Geometric mapping cross approximation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, 37: 1668-1673
- 89 郑兴帅. 弹性接触问题的边界面法分析及其低秩近似快速算法. [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2015 (Zheng Xingshuai. Analysis of the elastic contact problems with boundary face method and the research on its fast method with low rank approximation. [PhD Thesis]. Changsha: Hunan University, 2015 (in Chinese))
- 90 韩磊. 基于边界面法的 CAE 分析自动化关键技术研究. [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2017 (Han Lei. Research on key technologies of CAE analysis automation based on boundary face method. [PhD Thesis]. Changsha: Hunan University, 2017 (in Chinese))
- 91 鞠传明. 基于双层插值边界面法自动 CAE 分析关键技术研究. [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2020 (Ju Chuangming. Research on key technologies of automatic CAE analysis based on dual interpolation boundary face method. [PhD Thesis]. Changsha: Hunan University, 2020 (in Chinese))
- 92 Zhang J, Xiao R, Wen P, et al. Dual interpolation boundary face method for 3-D potential problem based on binary tree grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, 390: 114432
- 93 Xiao R, Zhang J, Chai P, et al. Dual interpolation boundary face method for 3-D acoustic problems based on binary tree grids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2023, 150: 7-19
- 94 Zhang J, Chai P, He R, et al. Implementation of a dual interpolation boundary face method by discontinuous meshes. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2022, 139: 152-168
- 95 Chai P, Zhang J, Xiao R, et al. A multi-domain BEM based on dual interpolation boundary face method for 3D elasticity problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2022, 143: 568-578
- 96 Chai P, Zhang J, Xiao R, et al. A multi-domain BEM based on the dual interpolation boundary face method for 3D potential problems. *Acta Mechanica*, 2023, 234: 451-469