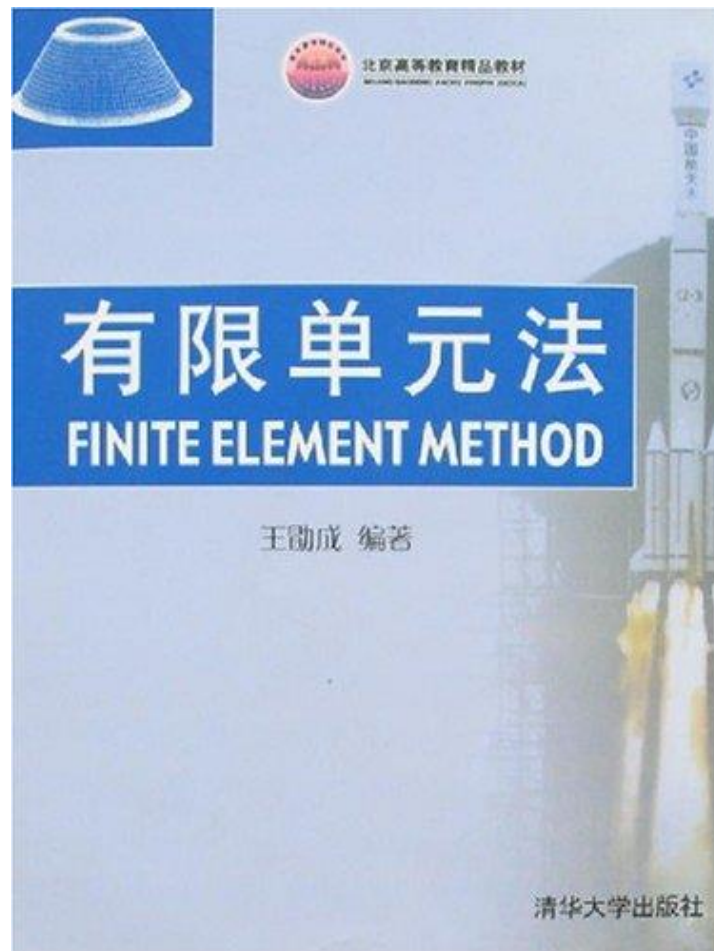
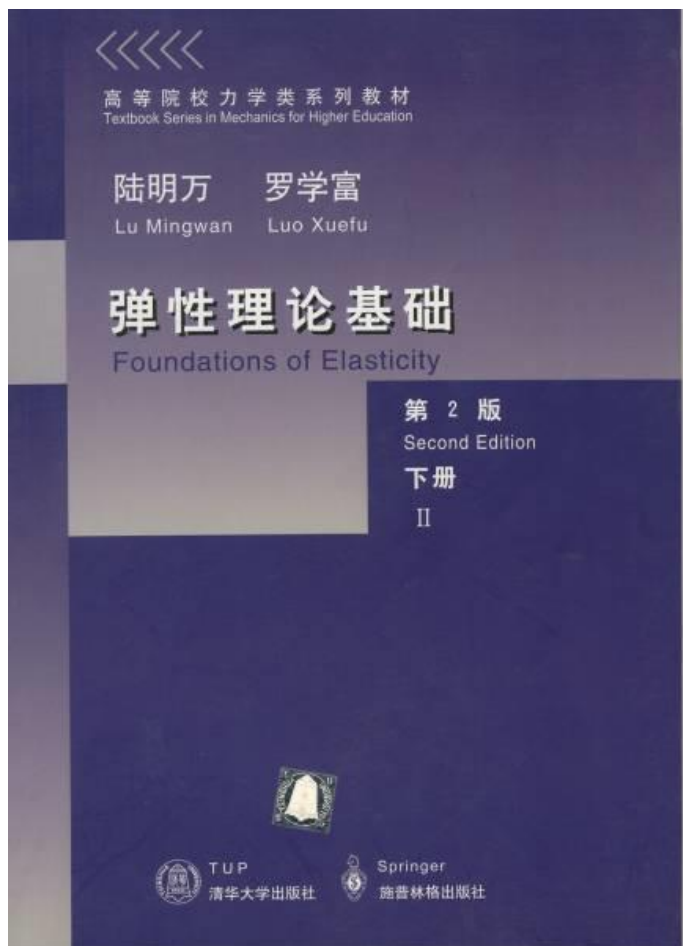


弹性力学 与 有限元分析

张见明

第一讲：工程实际问题分析1

- 参考教材：
- 陆明万、罗学富. 弹性理论基础. 清华大学出版社. 1990.
- 王勖成. 有限单元法. 清华大学出版社. 2003.



参考书

- 杜庆华、余寿文、姚振汉. 弹性理论. 科学出版社. 1986.
- 徐秉业、刘信声. 应用弹塑性力学. 清华大学出版社, 1995.
- 徐芝纶. 弹性力学 (上册, 第三版). 高等教育出版社.

引言

- 首先，给大家分析一些工程实际问题。
- ◆ 其次，引导大家如何就实际问题去运用所学的力学知识分析问题。
- ◆ 最后，由实际问题切入有限元，摆脱单纯的理论讲解。

Examples of industrial work 1

油田抽油装置

- Sampson post of pumping unit (1991-1992)

工程改进案例1:

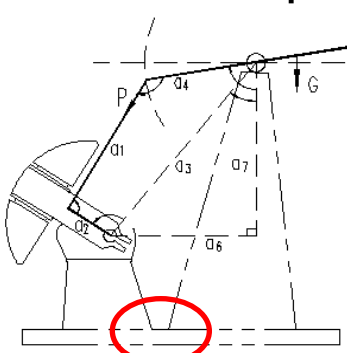
工程中抽油装置在周期荷载的作用下，由于曲柄的往复摆动，与底座的连接部分（如图2中红色圆圈部分）有弯矩作用，长期如此出现裂纹，最终裂纹扩展，断裂破坏。改进后的装置如图（3）所示。

对于井架部分，井架的顶部水平荷载作用下对井架底部产生弯矩，这是影响井架生命周期的不利因素。我们将来的改进方案（图4所示）是让井架顶部的荷载不对井架底部产生弯矩，并且同时解决底座周期荷载下产生裂纹的问题。大家可以思考如何布置结构才能解决此问题？

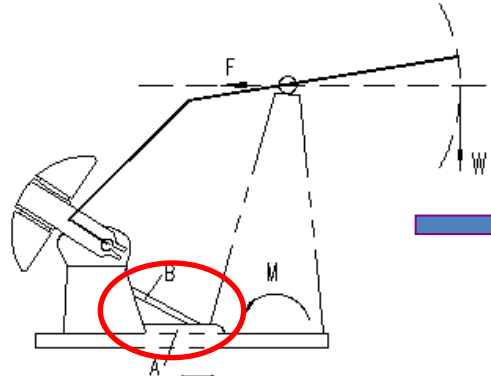


图(1)

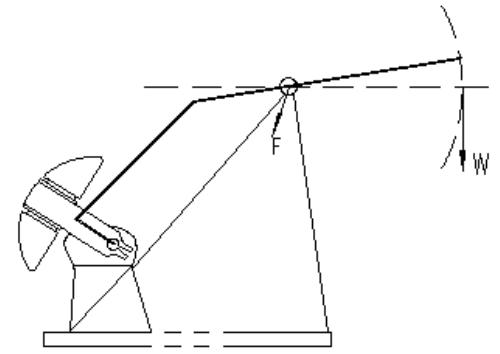
➤ Further improvement



图(2)



图(3)

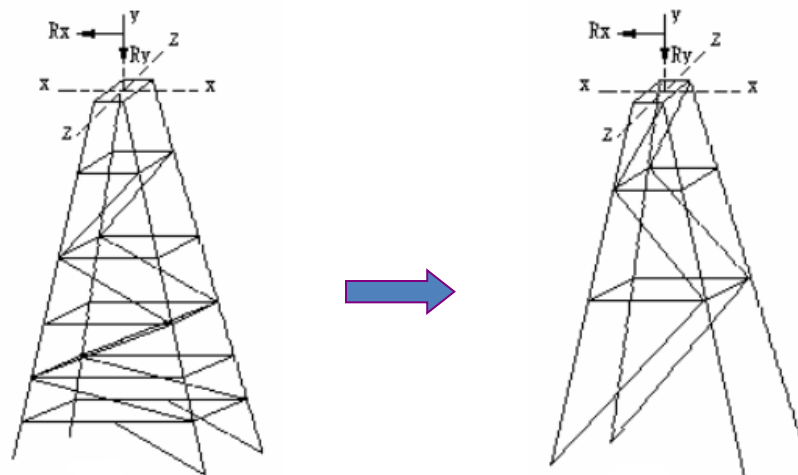


图(4)

工程改进案例2:

抽油装置的井架，原结构如图（1）所示，通过软件模拟分析，发现这种井架下部的大部分杆件是不受力的或者受力相对很小，这就造成了材料的浪费，于是就对原井架做出大胆的修改，修改之后的结构如图（2）所示，对修改后的结构通过建模，并用软件分析，发现每根杆件受力情况很理想。

修改前后各项参数的对比如方框中所示。可以看出但就材料使用上来说，第二种方案可以节省材料800多千克，通过这个例子就是想告诉大家两个问题，一是懂得批判，学会尝试，很多新颖的设想都是源于大胆的尝试。二是计算机编程的重要性，当代许多问题都是基于计算机，如果自己能够学会就问题写出程序，最后在解决问题，自己解决问题的能力将得到很大的提升。



(1)

(2)

Mass:	2280kg
Displacement:	4.4 mm
Max. stress:	132 MPa

Mass:	1421kg
Displacement:	3.1 mm
Max. stress:	58 MPa

Examples of industrial work (2)

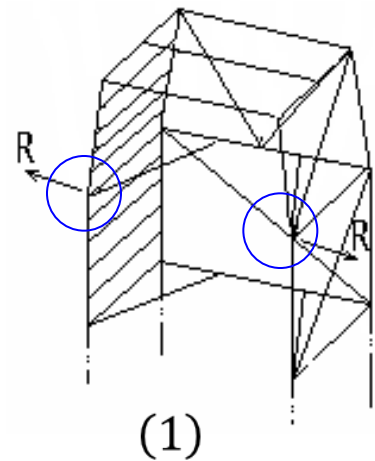
- Workover rig mast (1993-1994)



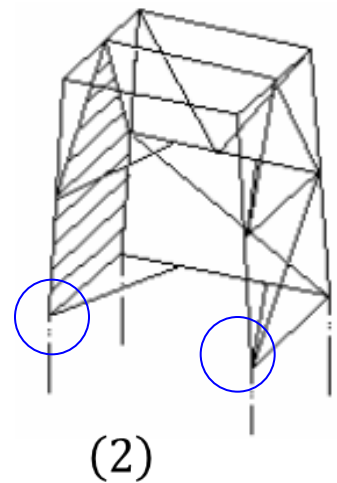
工程改进案例3:

消防救援车，升降架部分改进，改进前如图

(1) 所示，改进后如图 (2) 所示，并列举出节点处的最大应力参数作对比。



Max. stress: 325 MPa

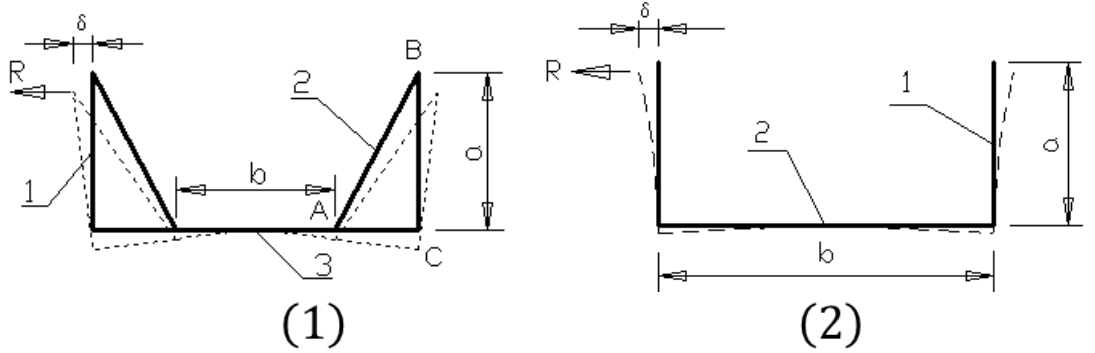
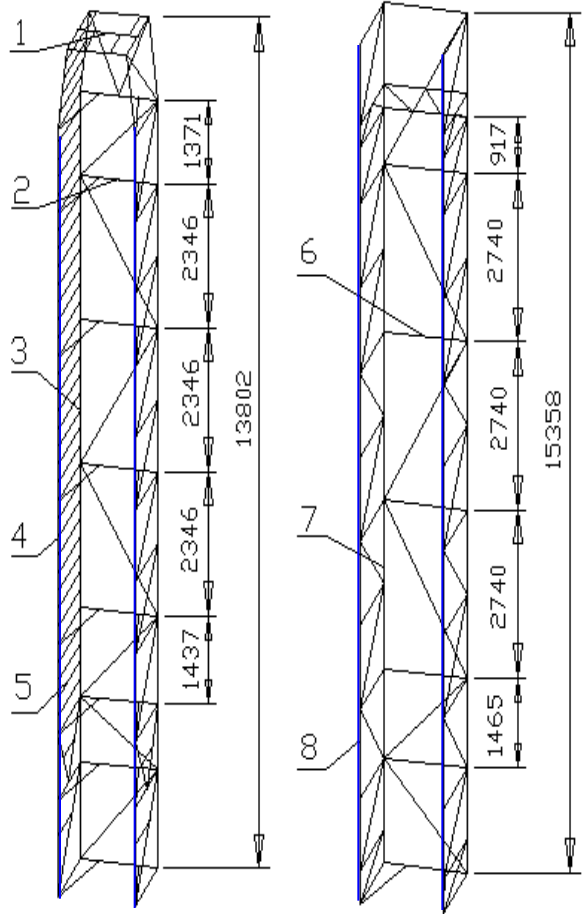


Max. stress: 180 MPa

Examples of industrial work (3)

➤ Further studies

工程改进案例4：槽钢部分改进

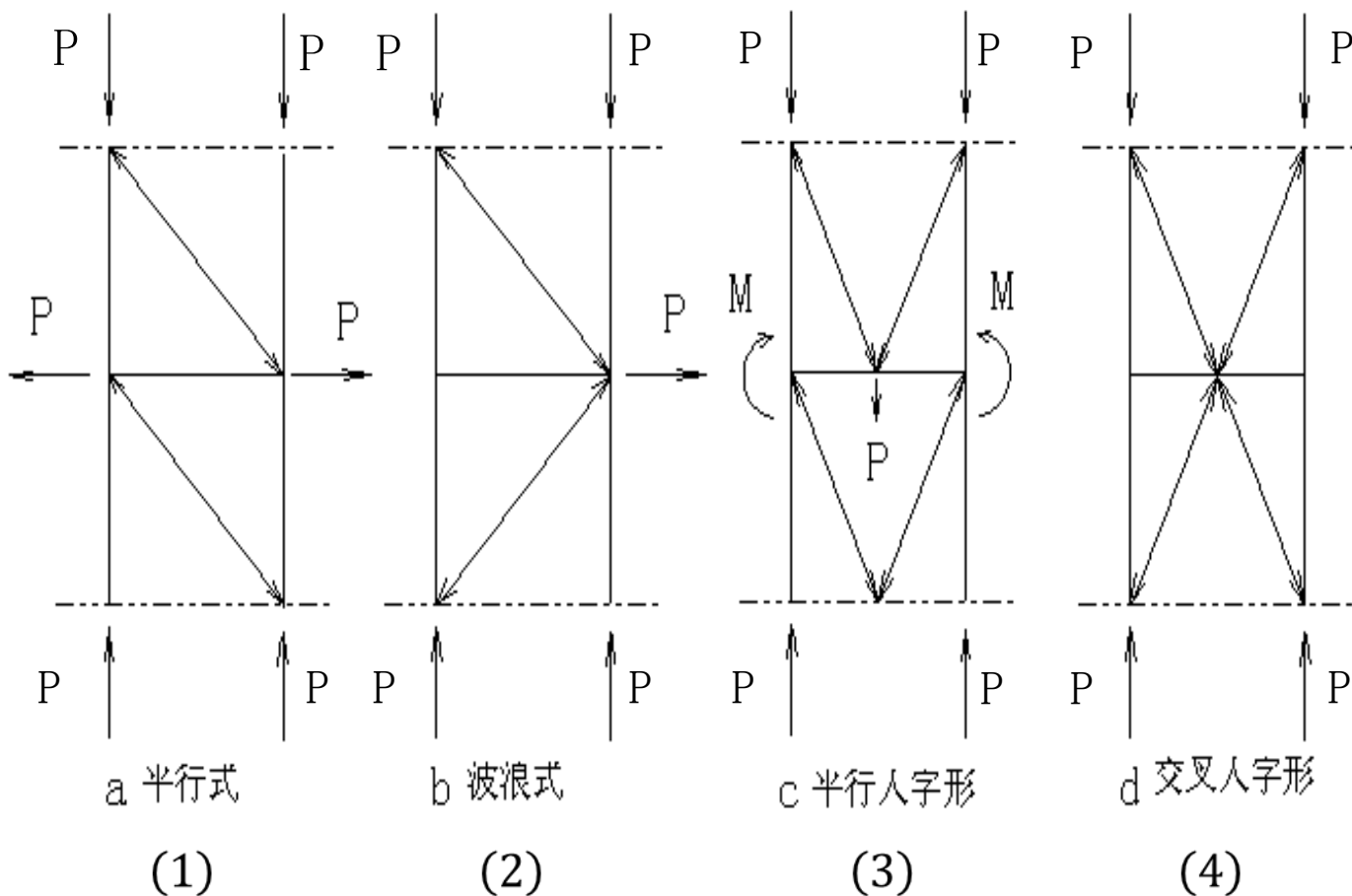


L140X140X12/16Mn ➡ I160×88×6/A3

思考题：

在不进行计算的情况下，试分析以下4种结构，在哪种受力形式下，结构的布置最为合理？

P表示荷载
M表示弯矩



第二讲：工程实际问题分析2

- **课程内容回顾：**

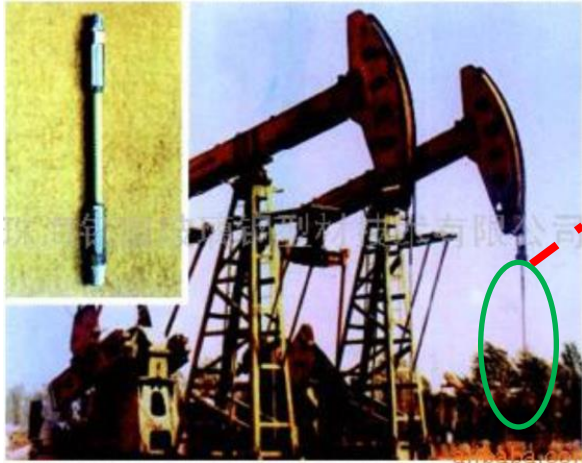
- 上节课讲解了部分工程实际问题，以及如何对工程实际问题受力分析的方法，又强调应用计算机编程在现在解决实际问题中的重要性。

- **本堂课主要内容：**

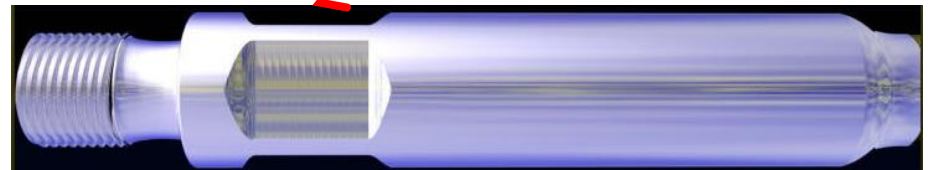
- 先是讲解一些工程实际问题，再结合习题了解简单的有限单元法。

Examples of industrial work (4)

- FRP sucker rod End-fitting (1997-1998)



〈玻璃钢抽油杆〉



〈玻璃钢抽油杆接头〉

玻璃钢抽油杆简单介绍:

玻璃钢抽油杆全称是玻璃纤维增强塑料抽油杆，是由树脂和玻璃纤维按一定比例，通过专门的拉挤和固化工艺制作而成的；它是由玻璃钢杆体和两端带螺纹的钢接头用高粘度环氧树脂粘合剂粘接而成。

玻璃钢纤维具有较高的强度，它是通过减少材料缺陷，而提升自身强度。

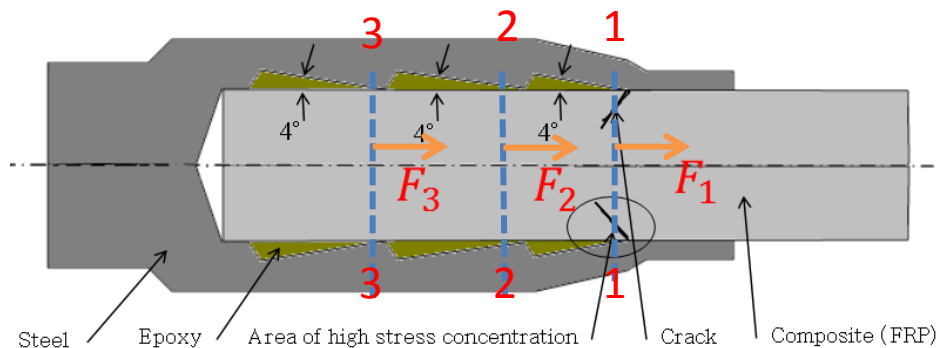
工程改进案例5:

玻璃钢杆体和两端带螺纹的钢接头用高粘度环氧树脂粘合剂粘接而成，（如图中黄色锯齿形部分，填充的就是高粘度环氧树脂）

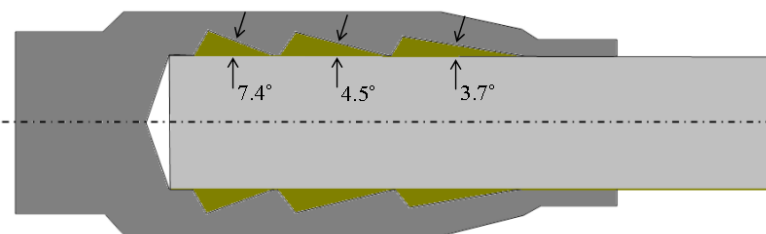
这些锯齿形的粘合剂与钢接头形成的斜面与水平方向之间的夹角 $\theta = 4^\circ$ ，小于两种材料形成自锁现象所要求的摩擦角。所以就造成接头和玻璃钢杆不会分离。但是缺陷就是在长期的周期荷载作用下，接头开始处会产生裂纹（图中圆圈处），进而产生疲劳破坏。

在原结构上做1-1,2-2,3-3，三个截面力分别为 F_1 , F_2 , F_3 。在三个力的作用下，三个截面产生变形 U_1 , U_2 , U_3 ，且 $U_1 > U_2 > U_3$ ，这样就造成了 $F_1 > F_2 > F_3$ ，在1-1截面处首先产生裂纹，进而影响抽油杆的使用寿命，所以，我们就通过改变这些锯齿形的粘合剂与钢接头形成的斜面与水平方向之间的夹角 θ 的方法使这三处的变形相等，进而得到 $F_1 = F_2 = F_3$ ，不至于在接头处提前出现裂纹，延长了抽油杆的使用寿命。

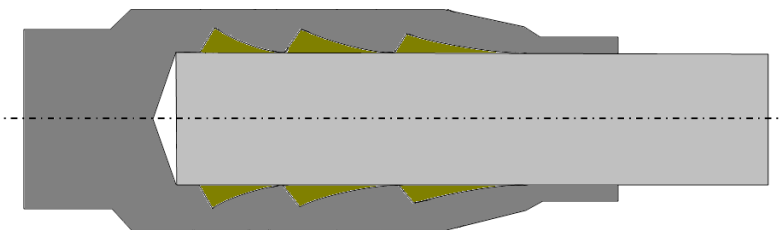
未来是否能够将锯齿形接触面做成曲面，来实现以上效果很期待同学们得去研究！



Fatigue cycles: 2.4 million



Fatigue cycles: 6.9 million



➤ Idea for further improvement

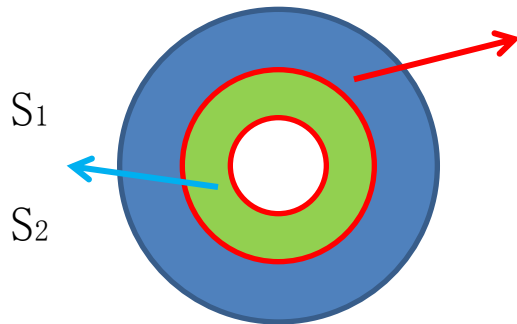
如何有效求得正确结果

- ◆ 计算模型的正确建立和合理简化：
 - 几何模型的正确性；
 - 单元类型的合理性；
 - 载荷及边界条件的正确性；
 - 网格的合理划分；
 - 材料特性的合理选取；
- ◆ 非线性因素的正确考虑……

材料自增强处理（对结构有利）

自增强处理主要是利用残余应力在构件工作时，抵消部分工作应力，延长使用寿命，延长疲劳出现的时间。

例如一个钢管 S_1 内径稍小于另一个钢管 S_2 的外径，加热后套在一起，冷却后就在内管表面形成残余应力，在枪炮管制作过程中，就是利用这种制作工艺在内管形成残余应力来抵消部分工作应力，从而延长使用寿命。



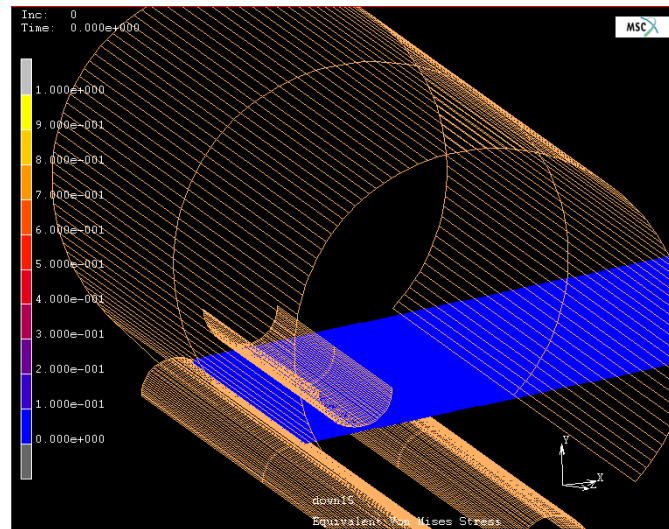
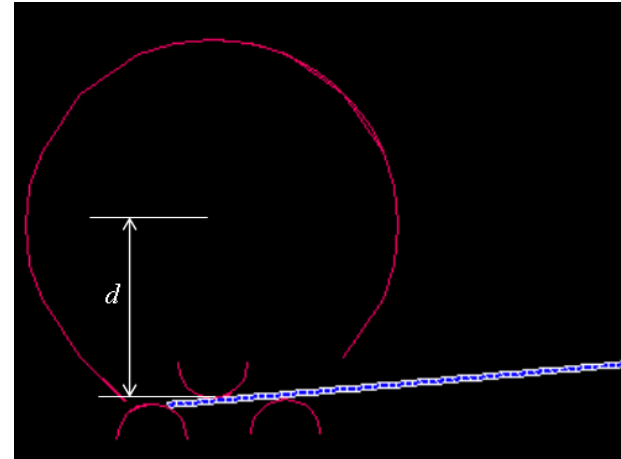
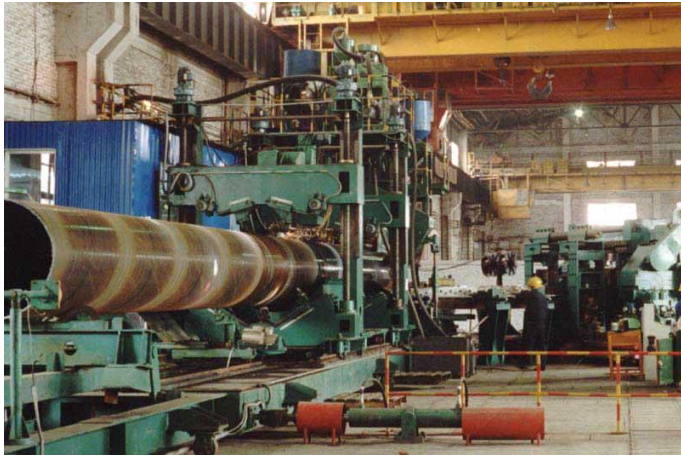
前面讨论的问题都是建立在材料的线弹性小变形范围内分析的，现实中很多变形问题都已超出胡克定律的使用范围，我们称之为非线性问题，比如钓鱼竿的变形，属于大变形的问題，诸如此类，现实中还有很多例子，在此不做一一介绍。下面就非线性问题做以下几个分类：

非线性问题 {

- ①材料非线性：材料本身的非线性的
- ②应力应变关系导致结构响应非线性
- 几何非线性：变形超过力学研究中
- ③小变形的要求（属于大变形问题）
- 边界条件非线性：接触问题

Examples of industrial work (5)

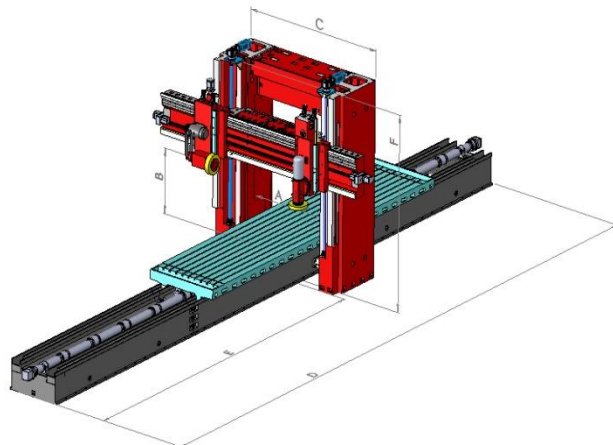
- Forming process of spiral welded pipes (1999)



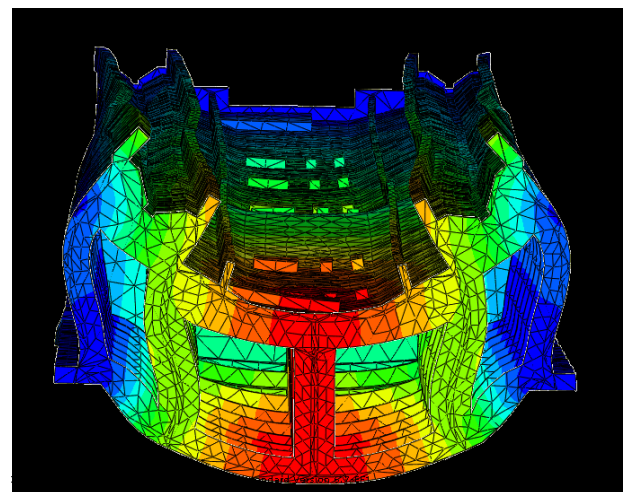
Examples of industrial work (6)

• 工程改进案例6：龙门导轨磨床(2011)

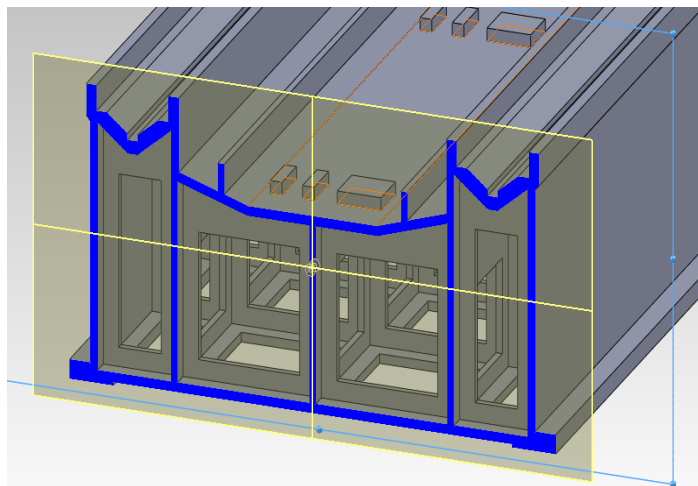
通过建模分析，磨床在很多地方的材料没有发挥受力的作用，这就造成材料冗余，对此我们进行了以下方面的修改。



(磨床实物图)

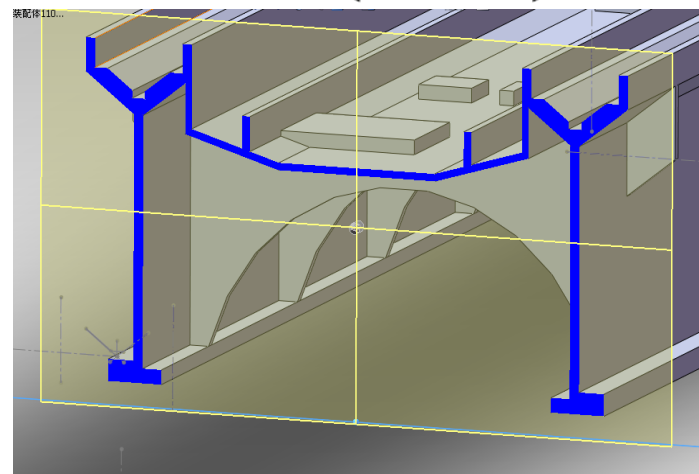


(位移云图)



床身重量：39.598吨

导轨最大变形： $8.1e^{-2}$ mm



床身重量：**25.274**吨

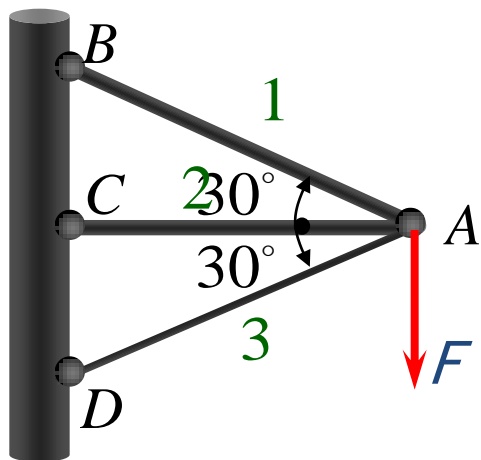
导轨最大变形： **$6.5e^{-2}$** mm

科技高度发展的时代

给设计人员的力学素质提出了高要求

- 软件开发商宣称要开发“傻瓜”软件；
- 工程专家指出滥用软件的事例层出不穷；
- 用先进软件得出错误结果的事每天都在发生；
- 设计人员必须具备相应的理论基础。

例题 3杆材料相同，AB杆面积为 200mm^2 ，AC杆面积为 300mm^2 ，AD杆面积为 400mm^2 ，若 $F=30\text{kN}$ ，试计算各杆的应力。



解： 设AC杆杆长为 l ，则AB、AD杆长为

$$l_{AB} = l_{AD} = \frac{2l}{\sqrt{3}}$$

列出平衡方程：

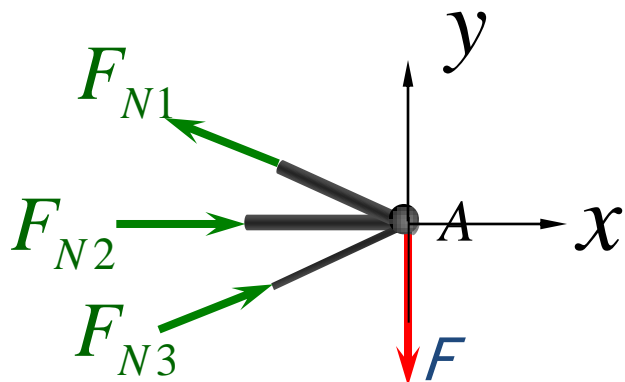
$$\sum F_x = 0 \quad F_{N1} \cos 30^\circ = F_{N2} + F_{N3} \cos 30^\circ$$

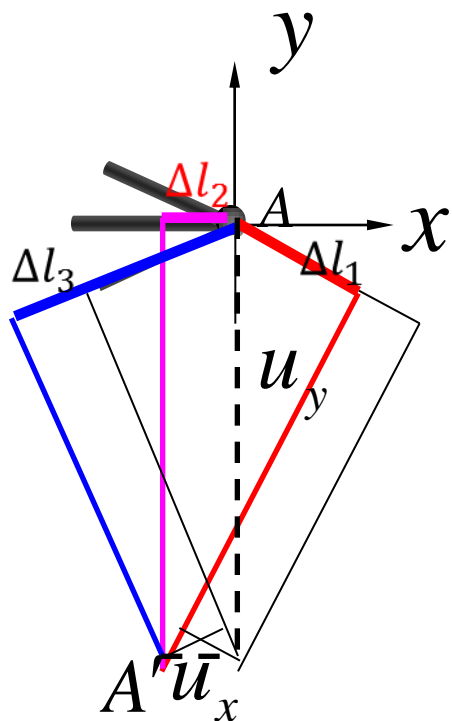
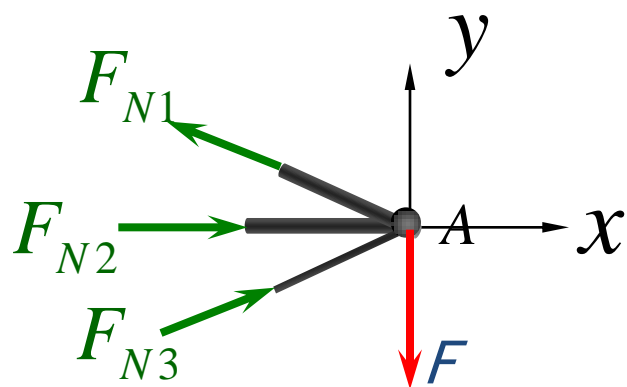
$$\sum F_y = 0 \quad F_{N1} \sin 30^\circ + F_{N3} \sin 30^\circ = F$$

即：
$$\sqrt{3}F_{N1} = 2F_{N2} + \sqrt{3}F_{N3} \quad (1)$$

$$F_{N1} + F_{N3} = 2F \quad (2)$$

列出变形几何关系





即: $\sqrt{3}F_{N1} = 2F_{N2} + \sqrt{3}F_{N3}$ (1)

$F_{N1} + F_{N3} = 2F$ (2)

列出变形几何关系

将A点的位移分量向各杆投影. 得

$$\Delta l_1 = u_y \sin \alpha - u_x \cos \alpha$$

$$\Delta l_2 = u_x$$

$$\Delta l_3 = u_y \sin \alpha + u_x \cos \alpha$$

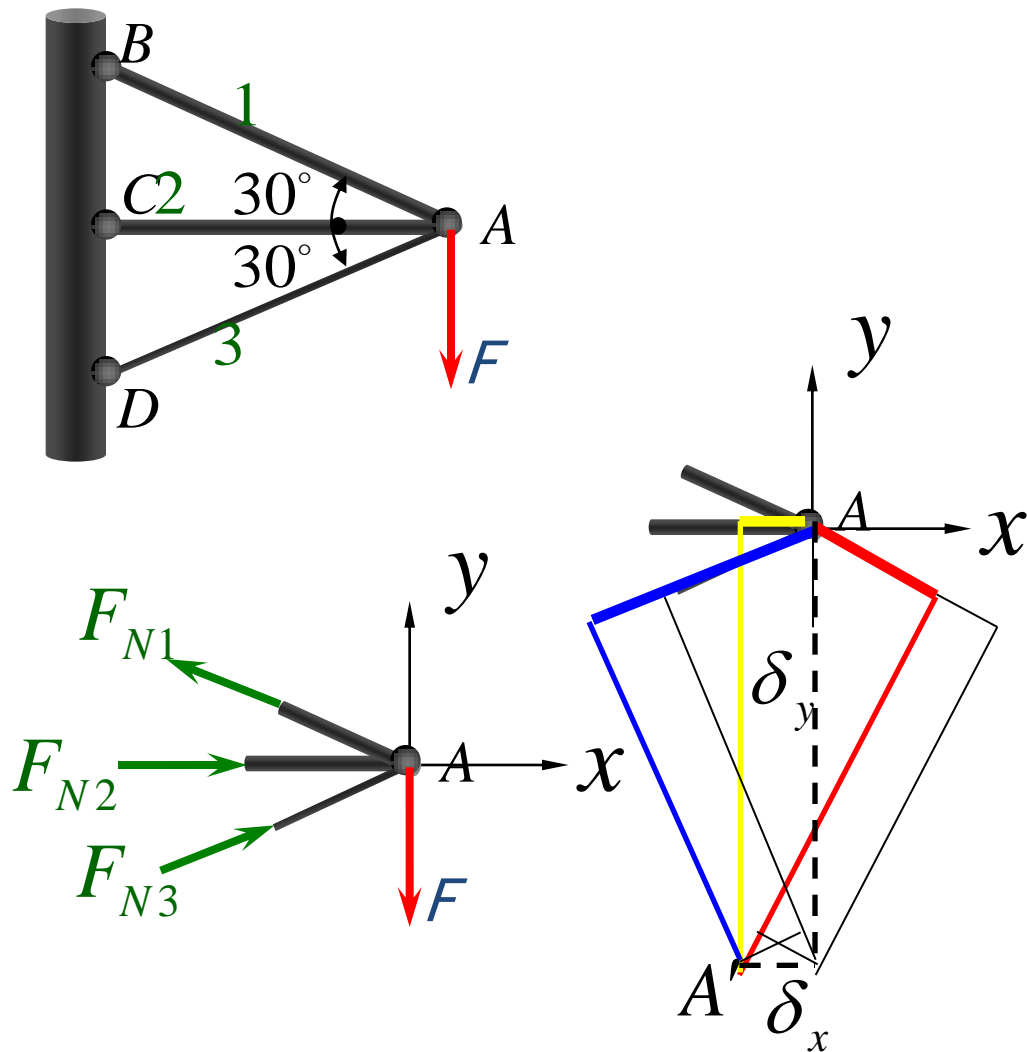
变形关系为 $\Delta l_3 - \Delta l_1 = 2\Delta l_2 \cos \alpha$

$$\Delta l_3 - \Delta l_1 = \sqrt{3}\Delta l_2$$

代入物理关系

$$\frac{2F_{N3}l}{\sqrt{3}EA_3} - \frac{2F_{N1}l}{\sqrt{3}EA_1} = \frac{\sqrt{3}F_{N2}l}{EA_2}$$

整理得 $F_{N3} = 2F_{N1} + 2F_{N2}$ (3)



联立 (1) (2) (3)，解得：

$$\sqrt{3}F_{N1} = 2F_{N2} + \sqrt{3}F_{N3} \quad (1)$$

$$F_{N1} + F_{N3} = 2F \quad (2)$$

$$F_{N3} = 2F_{N1} + 2F_{N2} \quad (3)$$

$$F_{N1} = \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)F = 25.4\text{kN}$$

$$\sigma_1 = 127\text{MPa} \quad (\text{拉})$$

$$F_{N2} = (\sqrt{3} - 2)F = -8.04\text{kN}$$

$$\sigma_2 = -26.8\text{MPa} \quad (\text{拉})$$

$$F_{N3} = \frac{2}{\sqrt{3}}F = 34.6\text{kN}$$

$$\sigma_3 = 86.6\text{MPa} \quad (\text{压})$$

$$\begin{cases} F_{N1} + F_{N3} = 2F(1) \\ \sqrt{3}F_{N1} - 2F_{N2} + \sqrt{3}F_{N3} = 0(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta l_1 = \frac{1}{2}u_y - \frac{\sqrt{3}}{2}u_x \\ \Delta l_2 = u_x \\ \Delta l_3 = \frac{1}{2}u_y + \frac{\sqrt{3}}{2}u_x \end{cases} \quad \text{又因为} \Delta l_1 = \frac{F_{N1}l_1}{EA_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_{N2}l_2}{EA_2}, \quad \Delta l_3 = \frac{F_{N3}l_3}{EA_3}$$

带入 (1) (2) 式可得

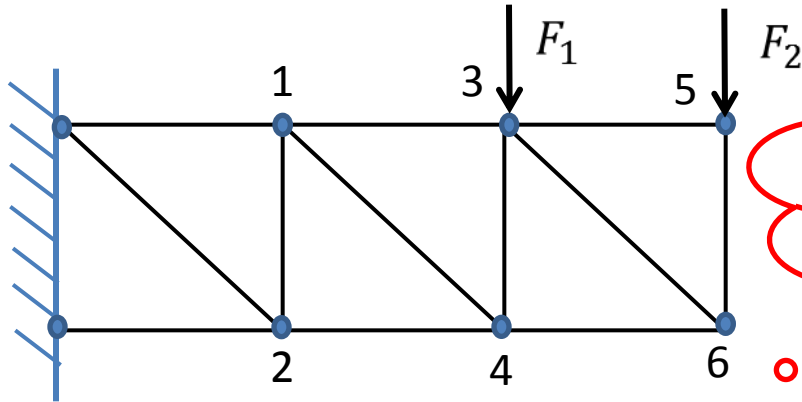
$$\begin{cases} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{EA_1}{l_1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{EA_3}{l_3}\right)u_x + \left(\frac{1}{2} \frac{EA_1}{l_1} + \frac{1}{2} \frac{EA_3}{l_3}\right)u_y = 2F \\ \left(-\frac{3}{2} \frac{EA_1}{l_1} - \frac{2EA_2}{l_2} + \frac{3}{2} \frac{EA_3}{l_3}\right)u_x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{EA_1}{l_1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{EA_3}{l_3}\right)u_y = 0 \end{cases}$$

将上式写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{EA_1}{l_1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{EA_3}{l_3} & \frac{1}{2} \frac{EA_1}{l_1} + \frac{1}{2} \frac{EA_3}{l_3} \\ -\frac{3}{2} \frac{EA_1}{l_1} - \frac{2EA_2}{l_2} + \frac{3}{2} \frac{EA_3}{l_3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{EA_1}{l_1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{EA_3}{l_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F \\ 0 \end{bmatrix}$$

上述写成矩阵形式的目的是，这样得到的矩阵就可以用计算机编程来处理，只需要输入相关参数就可以，对于大型的结构，就能显示出利用矩阵形式的优越性。

第三讲：有限单元法中整体和单元刚度矩阵



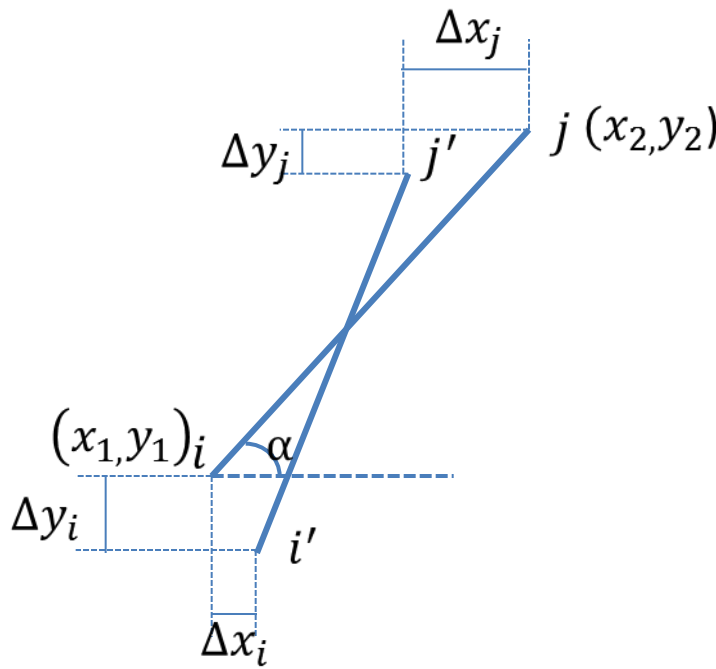
思考如何求图示桁架结构的轴力？

(图1)

如图1示桁架结构如果知道六个节点1、2、3、4、5、6，的位移，通过编程就可以求得每根杆件的轴力。

求轴力这项工作可以通过编程实现，在程序中需要输入的量包括每个节点的坐标 (x_i, y_i) ，截面参数 A_i, E ，作用的外荷载 F_1, F_2 ，以及要输入的节点位移 (U_x^i, U_y^i) 。

下面推导在确定一根杆两端位移的情况下怎么求杆的轴力：



(图1)

图1中*ij*杆表示原杆，*i*端坐标为 (x_1, y_1)
*j*端坐标为 (x_2, y_2) ，*i'j'*表示变形后的杆
 原杆长度为：

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

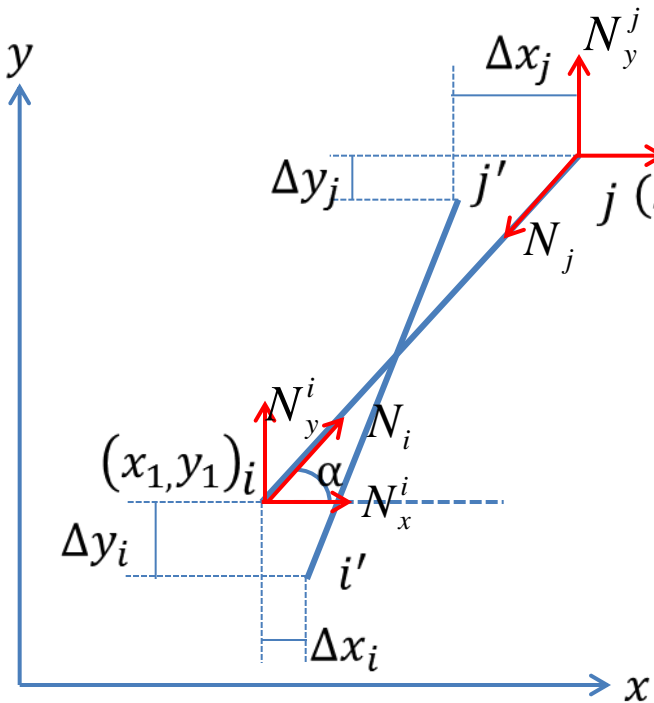
$$dl = \frac{\partial l}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial l}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial l}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial l}{\partial y_2} dy_2$$

$$= \frac{\partial l}{\partial x_1} \Delta x_i + \frac{\partial l}{\partial y_1} \Delta y_i + \frac{\partial l}{\partial x_2} \Delta x_j + \frac{\partial l}{\partial y_2} \Delta y_j$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_1} & \frac{\partial l}{\partial y_1} & \frac{\partial l}{\partial x_2} & \frac{\partial l}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix} = (\partial l)(u)$$

$$\frac{\partial l}{\partial x_1} = \frac{x_1 - x_2}{l}, \frac{\partial l}{\partial y_1} = \frac{y_1 - y_2}{l}, \frac{\partial l}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1}{l}, \frac{\partial l}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{l}$$

①在图示坐标系下杆端轴力表示如下：



当 N_i, N_j 为压力时, $N_x^i, N_y^i, N_x^j, N_y^j$ 正方向如图示

$$N_x^i = N_i \cos \alpha = N_i \frac{x_2 - x_1}{l} = N_i \left(-\frac{\partial l}{\partial x_1} \right) = -N_i \frac{\partial l}{\partial x_1}$$

$$N_y^i = N_i \sin \alpha = N_i \frac{y_2 - y_1}{l} = N_i \left(-\frac{\partial l}{\partial y_1} \right) = -N_i \frac{\partial l}{\partial y_1}$$

$$N_x^j = -N_j \cos \alpha = -N_j \frac{x_2 - x_1}{l} = -N_j \frac{\partial l}{\partial x_2}$$

$$N_y^j = -N_j \sin \alpha = -N_j \frac{y_2 - y_1}{l} = -N_j \frac{\partial l}{\partial y_2}$$

由等式右侧项为 $-N_i \frac{\partial l}{\partial x_1}, -N_i \frac{\partial l}{\partial y_1}, -N_j \frac{\partial l}{\partial x_2}, -N_j \frac{\partial l}{\partial y_2}$

其中负号表示 N_i, N_j 为压力。

N_x^i 表示*i*端x方向的分力

N_y^i 表示*i*端y方向的分力

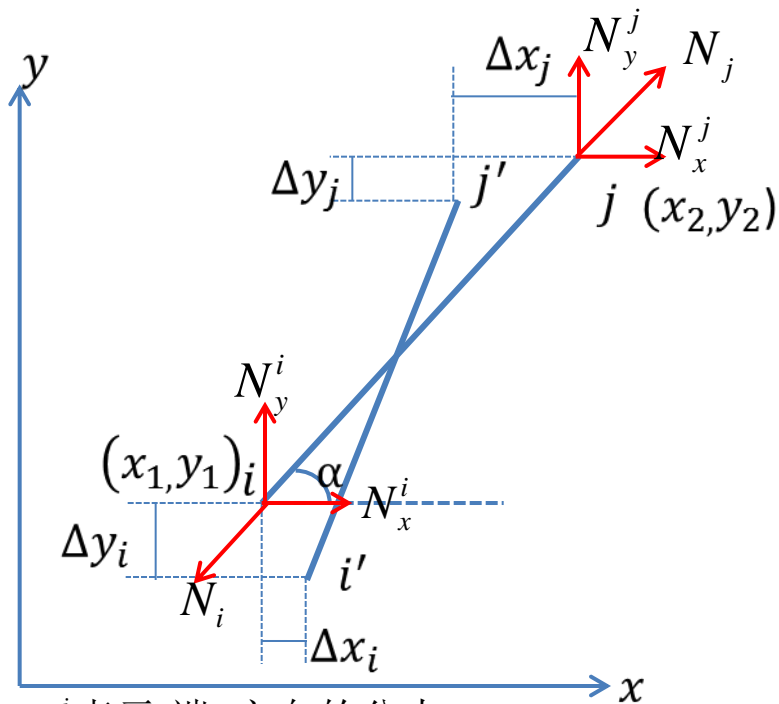
N_x^j 表示*j*端x方向的分力, Δx_i 表示整体坐标系下*i*端位移

N_y^j 表示*j*端y方向的分力, Δy_i 表示整体坐标系下*i*端位移

N_i 表示*i*端x方向所受的轴力, Δx_j 表示整体坐标系下*j*端位移

N_j 表示*j*端y方向所受的轴力, Δy_j 表示整体坐标系下*j*端位移

②在图示坐标系下杆端轴力表示如下：



当 N_i, N_j 为拉力时, $N_x^i, N_y^i, N_x^j, N_y^j$ 正方向如图示

$$N_x^i = -N_i \cos \alpha = -N_i \frac{x_2 - x_1}{l} = -N_i \left(-\frac{\partial l}{\partial x_1}\right) = N_i \frac{\partial l}{\partial x_1}$$

$$N_y^i = -N_i \sin \alpha = -N_i \frac{y_2 - y_1}{l} = -N_i \left(-\frac{\partial l}{\partial y_1}\right) = N_i \frac{\partial l}{\partial y_1}$$

$$N_x^j = N_j \cos \alpha = N_j \frac{x_2 - x_1}{l} = N_j \frac{\partial l}{\partial x_2}$$

$$N_y^j = N_j \sin \alpha = N_j \frac{y_2 - y_1}{l} = N_j \frac{\partial l}{\partial y_2}$$

由等式右侧项为 $N_i \frac{\partial l}{\partial x_1}, N_i \frac{\partial l}{\partial y_1}, N_j \frac{\partial l}{\partial x_2}, N_j \frac{\partial l}{\partial y_2}$

其中 N_i, N_j 为拉力。

N_x^i 表示*i*端x方向的分力

N_y^i 表示*i*端y方向的分力

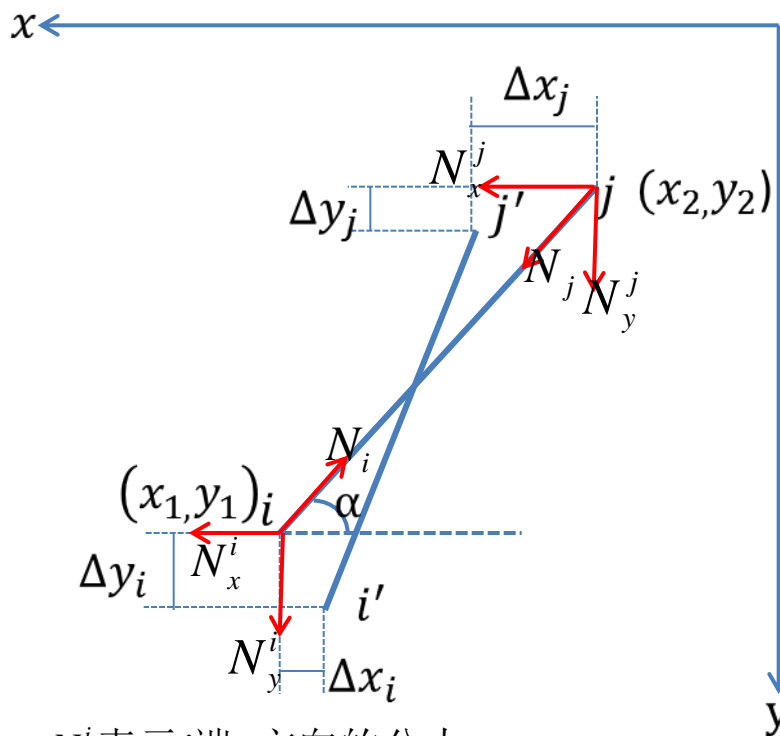
N_x^j 表示*j*端x方向的分力, Δx_i 表示整体坐标系下*i*端位移

N_y^j 表示*j*端y方向的分力, Δy_i 表示整体坐标系下*i*端位移

N_i 表示*i*端x方向所受的轴力, Δx_j 表示整体坐标系下*j*端位移

N_j 表示*j*端y方向所受的轴力, Δy_j 表示整体坐标系下*j*端位移

③在图示坐标系下杆端轴力表示如下：



N_x^i 表示*i*端x方向的分力

N_y^i 表示*i*端y方向的分力

N_x^j 表示*j*端x方向的分力， Δx_i 表示整体坐标系下*i*端位移

N_y^j 表示*j*端y方向的分力， Δy_i 表示整体坐标系下*i*端位移

N_i 表示*i*端x方向所受的轴力， Δx_j 表示整体坐标系下*j*端位移

N_j 表示*j*端y方向所受的轴力， Δy_j 表示整体坐标系下*j*端位移

当 N_i, N_j 为压力时， $N_x^i, N_y^i, N_x^j, N_y^j$ 正方向如图示

$$N_x^i = -N_i \cos \alpha = -N_i \frac{x_1 - x_2}{l} = -N_i \frac{\partial l}{\partial x_1}$$

$$N_y^i = -N_i \sin \alpha = -N_i \frac{y_1 - y_2}{l} = -N_i \frac{\partial l}{\partial y_1}$$

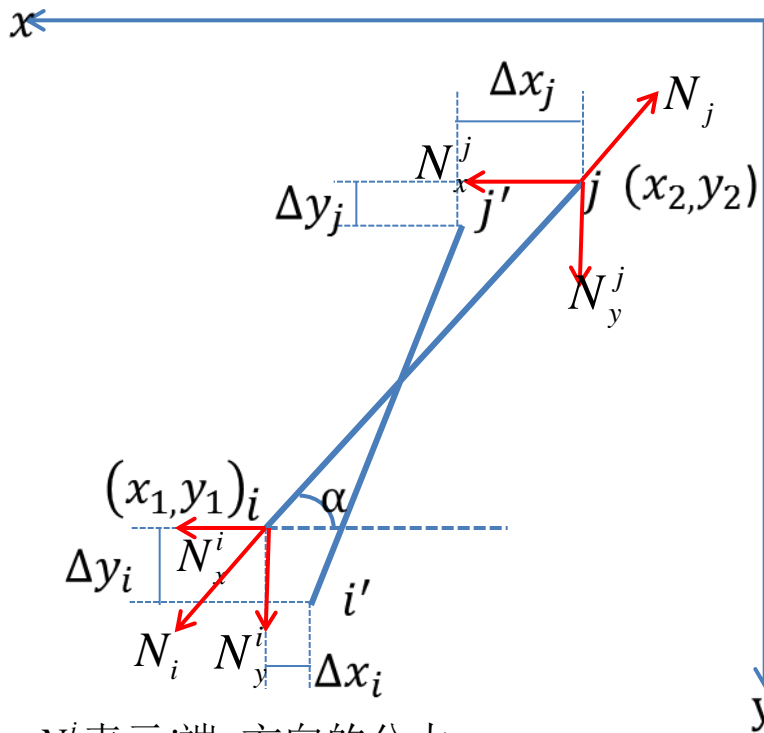
$$N_x^j = N_j \cos \alpha = N_j \frac{x_1 - x_2}{l} = -N_j \frac{\partial l}{\partial x_2}$$

$$N_y^j = N_j \sin \alpha = N_j \frac{y_1 - y_2}{l} = -N_j \frac{\partial l}{\partial y_2}$$

由等式右侧项为 $-N_i \frac{\partial l}{\partial x_1}, -N_i \frac{\partial l}{\partial y_1}, -N_j \frac{\partial l}{\partial x_2}, -N_j \frac{\partial l}{\partial y_2}$

其中负号表示 N_i, N_j 为压力。

④在图示坐标系下杆端轴力表示如下：



N_x^i 表示*i*端x方向的分力

N_y^i 表示*i*端y方向的分力

N_x^j 表示*j*端x方向的分力，

Δx_i 表示整体坐标系下*i*端位移

N_y^j 表示*j*端y方向的分力，

Δy_i 表示整体坐标系下*i*端位移

N_i 表示*i*端x方向所受的轴力， Δx_j 表示整体坐标系下*j*端位移

N_j 表示*j*端y方向所受的轴力， Δy_j 表示整体坐标系下*j*端位移

当 N_i, N_j 为拉力时， $N_x^i, N_y^i, N_x^j, N_y^j$ 正方向如图示

$$N_x^i = N_i \cos \alpha = N_i \frac{x_1 - x_2}{l} = N_i \frac{\partial l}{\partial x_1}$$

$$N_y^i = N_i \sin \alpha = N_i \frac{y_1 - y_2}{l} = N_i \frac{\partial l}{\partial y_1}$$

$$N_x^j = -N_j \cos \alpha = -N_j \frac{x_1 - x_2}{l} = -N_j \left(-\frac{\partial l}{\partial x_2}\right) = N_j \frac{\partial l}{\partial x_2}$$

$$N_y^j = -N_j \sin \alpha = -N_j \frac{y_1 - y_2}{l} = -N_j \left(-\frac{\partial l}{\partial y_2}\right) = N_j \frac{\partial l}{\partial y_2}$$

由等式右侧项为 $N_i \frac{\partial l}{\partial x_1}, N_i \frac{\partial l}{\partial y_1}, N_j \frac{\partial l}{\partial x_2}, N_j \frac{\partial l}{\partial y_2}$

其中 N_i, N_j 为拉力。

由于材料力学中二力杆与变形之间的关系可知

$$\Delta l = \frac{N_i l}{EA} \Rightarrow dl = \frac{N_i l}{EA} \Rightarrow N_i = \frac{EA}{l} dl \Rightarrow N_i = \frac{EA}{l} [\partial l][u]$$

E 为弹性模量， A 为杆件的横截面面积

$$\text{由前面推导可知} [\partial l] = \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_1} & \frac{\partial l}{\partial y_1} & \frac{\partial l}{\partial x_2} & \frac{\partial l}{\partial y_2} \end{pmatrix}, [u] = \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix},$$

由前面1, 2, 3, 4几种情况可知杆端力分量杆端力的关系

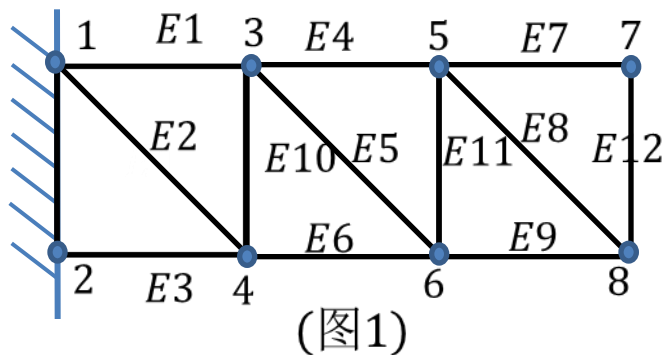
$$\begin{pmatrix} N_x^i \\ N_y^i \\ N_x^j \\ N_y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_i \frac{\partial l}{\partial x_1} \\ N_i \frac{\partial l}{\partial y_1} \\ N_j \frac{\partial l}{\partial x_2} \\ N_j \frac{\partial l}{\partial y_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} N_x^i \\ N_y^i \\ N_x^j \\ N_y^j \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_1} \\ \frac{\partial l}{\partial y_1} \\ \frac{\partial l}{\partial x_2} \\ \frac{\partial l}{\partial y_2} \end{pmatrix} [\partial l][u] = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_1} \\ \frac{\partial l}{\partial y_1} \\ \frac{\partial l}{\partial x_2} \\ \frac{\partial l}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_1} & \frac{\partial l}{\partial y_1} & \frac{\partial l}{\partial x_2} & \frac{\partial l}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial l}{\partial x_1}\right)^2 & \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial l}{\partial y_1} & \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial l}{\partial x_2} & \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial l}{\partial y_2} \\ \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial l}{\partial y_1} & \left(\frac{\partial l}{\partial y_1}\right)^2 & \frac{\partial l}{\partial x_2} \frac{\partial l}{\partial y_1} & \frac{\partial l}{\partial y_1} \frac{\partial l}{\partial y_2} \\ \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial l}{\partial x_2} & \frac{\partial l}{\partial x_2} \frac{\partial l}{\partial y_1} & \left(\frac{\partial l}{\partial x_2}\right)^2 & \frac{\partial l}{\partial x_2} \frac{\partial l}{\partial y_2} \\ \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial l}{\partial y_2} & \frac{\partial l}{\partial y_1} \frac{\partial l}{\partial y_2} & \frac{\partial l}{\partial x_2} \frac{\partial l}{\partial y_2} & \left(\frac{\partial l}{\partial y_2}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix} \\
&= \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

红色部分是刚度矩阵[k]，蓝色部分是位移列阵[u]

第四讲：由单元刚度矩阵合成整体刚度矩阵

其中1、2、3、4、5、6、7、8为节点编号



$$\begin{pmatrix} N_x^i \\ N_y^i \\ N_x^j \\ N_y^j \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial l}{\partial x_1}\right)^2 & \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial l}{\partial y_1} & \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial l}{\partial x_2} & \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial l}{\partial y_2} \\ \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial l}{\partial y_1} & \left(\frac{\partial l}{\partial y_1}\right)^2 & \frac{\partial l}{\partial x_2} \frac{\partial l}{\partial y_1} & \frac{\partial l}{\partial y_1} \frac{\partial l}{\partial y_2} \\ \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial l}{\partial x_2} & \frac{\partial l}{\partial x_2} \frac{\partial l}{\partial y_1} & \left(\frac{\partial l}{\partial x_2}\right)^2 & \frac{\partial l}{\partial x_2} \frac{\partial l}{\partial y_2} \\ \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial l}{\partial y_2} & \frac{\partial l}{\partial y_1} \frac{\partial l}{\partial y_2} & \frac{\partial l}{\partial x_2} \frac{\partial l}{\partial y_2} & \left(\frac{\partial l}{\partial y_2}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{pmatrix}$$

在实际工程中，每个节点（除1、2外）都是焊接的，所以在结构受力的情况下，任意一根杆件会发生弯曲转动，产生弯矩，所以平衡方程在节点的x、y方向除合力平衡外还应加入力矩平衡方程。

上节课讲到杆端力与杆端位移的关系

方便起见我们将刚度矩阵用[k]表示，位移列阵用[u]表示则原方程可以写成：

$$\begin{pmatrix} N_x^i \\ N_y^i \\ N_x^j \\ N_y^j \end{pmatrix} = [k][u], \text{ 在单位位移作用下则 } \begin{pmatrix} N_x^i \\ N_y^i \\ N_x^j \\ N_y^j \end{pmatrix} = [k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} N_x^i \\ N_y^i \\ N_x^j \\ N_y^j \end{pmatrix} = [k] = \begin{matrix} & u_i^x & u_i^y & u_j^x & u_j^y \\ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} & & & & \end{matrix}, \quad u_i^x, u_i^y, u_j^x, u_j^y \text{ 分别表示 } ij \text{ 两点}$$

的水平 and 垂直方向的位移, 将刚度矩阵分块,

左上角矩阵表示*i*节点产生单位位移时在*i*节点产生的杆端力,

左下角矩阵是表示*i*节点产生单位位移时在*j*节点产生的杆端力,

右上角矩阵是表示*j*节点产生单位位移时在*i*节点产生的杆端力,

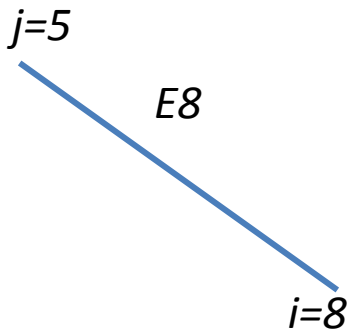
右下角矩阵是表示*j*节点产生单位位移时在*j*节点产生的杆端力,

桁架整体的节点力与节点位移关系

$$F_x^i \text{ 表示节点 } i \text{ 在 } x \text{ 轴所受的荷载, } F_y^i \text{ 表示节点 } i \text{ 在 } y \text{ 轴所受的荷载, } \begin{pmatrix} F_x^1 \\ F_y^2 \\ \vdots \\ F_x^8 \\ F_y^8 \end{pmatrix} = [K] \begin{pmatrix} u_x^1 \\ u_y^2 \\ \vdots \\ u_x^8 \\ u_y^8 \end{pmatrix},$$

$[K]$ 表示整体刚度矩阵, $u_x^i, u_y^i (i=1, 2 \dots 8)$ 表示各节点的水平 and 竖向位移。

• 下面介绍单元刚度矩阵怎么集成整体刚度矩阵:



以8节点为例, 从桁架图中我们可以看出, 与8节点相关联的节点有5、6、7节点对应的单元分别是E8、E9、E12。

对E8单元分析8端点产生单位位移时:

①在8端点产生的杆端力为 $\begin{bmatrix} k_{11}^8 & k_{12}^8 \\ k_{21}^8 & k_{22}^8 \end{bmatrix}$, ②在5端点产生的杆端力为 $\begin{bmatrix} k_{31}^8 & k_{32}^8 \\ k_{41}^8 & k_{42}^8 \end{bmatrix}$,

将E8单元8端产生单位位移时, 在8节点和5节点产生的杆端力集成到整体刚度矩阵 $[k]$ 中。

对E8单元分析5端点产生单位位移时:

①在8端点产生的杆端力为 $\begin{bmatrix} k_{13}^8 & k_{14}^8 \\ k_{23}^8 & k_{24}^8 \end{bmatrix}$, ②在5端点产生的杆端力为 $\begin{bmatrix} k_{33}^8 & k_{34}^8 \\ k_{43}^8 & k_{44}^8 \end{bmatrix}$,

将E8单元5端产生单位位移时, 在8节点和5节点产生的杆端力集成到整体刚度矩阵 $[k]$ 中

k_n^i 上标 i 表示单元编码, n 表示在该单元矩阵中的位置

$j = 7$
 $E12$
 对E12单元分析8端点产生单位位移时：
 ①在8端点产生的杆端力为 $\begin{bmatrix} k_{11}^{12} & k_{12}^{12} \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} \end{bmatrix}$ ，②在7端点产生的杆端力为 $\begin{bmatrix} k_{31}^{12} & k_{32}^{12} \\ k_{41}^{12} & k_{42}^{12} \end{bmatrix}$ ，
 将E12单元8端产生单位位移时，在8节点和7节点产生的杆端力集成到整体刚度矩阵 $[k]$ 中。
 对E12单元分析7端点产生单位位移时：
 ①在8端点产生的杆端力为 $\begin{bmatrix} k_{13}^{12} & k_{14}^{12} \\ k_{23}^{12} & k_{24}^{12} \end{bmatrix}$ ，②在7端点产生的杆端力为 $\begin{bmatrix} k_{33}^{12} & k_{34}^{12} \\ k_{43}^{12} & k_{44}^{12} \end{bmatrix}$ ，
 $i = 8$
 将E12单元7端产生单位位移时，在8节点和7节点产生的杆端力集成到整体刚度矩阵 $[k]$ 中。

$E9$
 对E9单元分析8端点产生单位位移时：
 ①在8端点产生的杆端力为 $\begin{bmatrix} k_{11}^9 & k_{12}^9 \\ k_{21}^9 & k_{22}^9 \end{bmatrix}$ ，②在6端点产生的杆端力为 $\begin{bmatrix} k_{31}^9 & k_{32}^9 \\ k_{41}^9 & k_{42}^9 \end{bmatrix}$ ，
 $j = 6$ $i = 8$
 将E9单元8端产生单位位移时，在8节点和6节点产生的杆端力集成到整体刚度矩阵 $[k]$ 中。
 对E9单元分析6端点产生单位位移时：
 ①在8端点产生的杆端力为 $\begin{bmatrix} k_{13}^9 & k_{14}^9 \\ k_{23}^9 & k_{24}^9 \end{bmatrix}$ ，②在6端点产生的杆端力为 $\begin{bmatrix} k_{33}^9 & k_{34}^9 \\ k_{43}^9 & k_{44}^9 \end{bmatrix}$ ，
 将E9单元6端产生单位位移时，在8节点和6节点产生的杆端力集成到整体刚度矩阵 $[k]$ 中。

✿ 在计算机中用 for 语句可以实现由单元刚度矩阵到整体刚度矩阵的集成

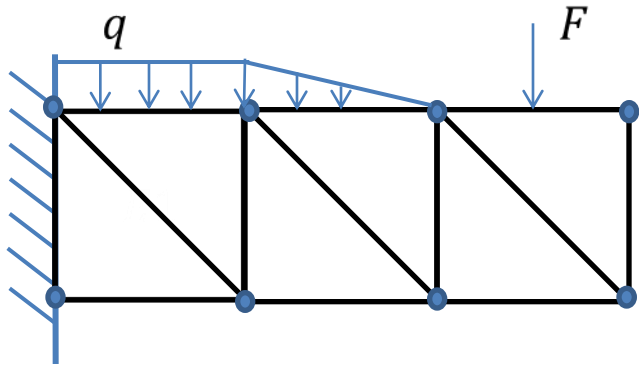
$for(i = 0; i < E_n; i++)$

其中需要输入的参数 E_i, k_{Ei}

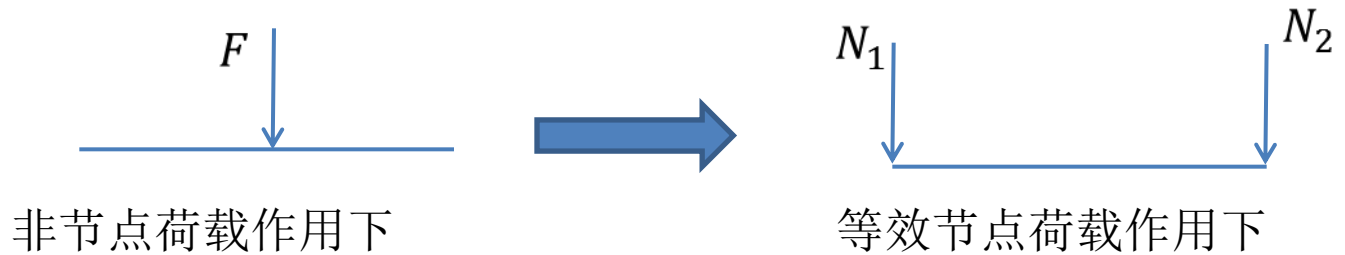
每根杆两 endpoint v_{i_1} (坐标), v_{i_2} (坐标)

以上形成的整体刚度矩阵是自由无约束限制的，此时的刚度矩阵为奇异矩阵（不可逆），在加上约束之后的整体刚度矩阵的变换方法如《有限单元法》中P73页所示

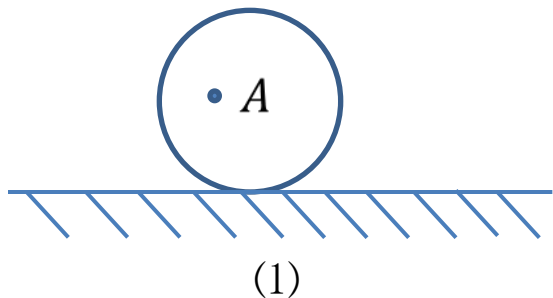
第五讲：非节点位置的相关问题



★ 上节课讲到每根杆件单元在节点力作用下合成整体节点荷载阵，那么在非节点力作用下（如左图线性荷载和集中荷载作用在杆单元中部）求解节点荷载列阵时就需要将非节点荷载转化为节点荷载。



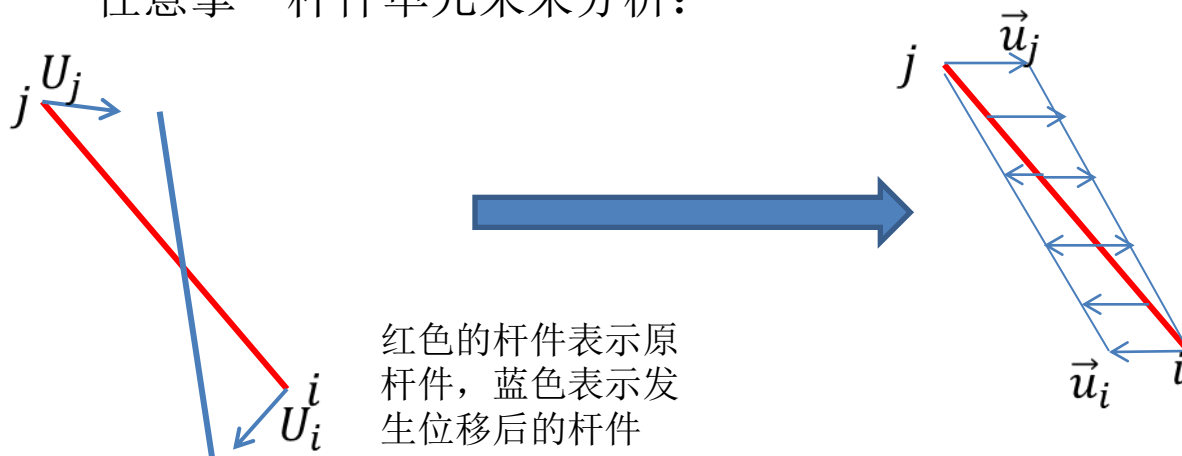
★ 以上讲解的例子均是存在节点的结构，思考一下，对于没有节点的结构我们怎么求它上面抹一点的位移与力的关系？



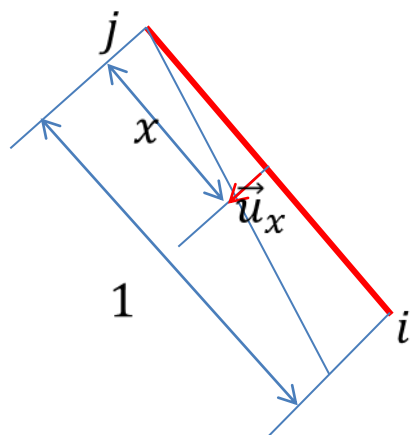
如图（1）示车轮，就是无节点的结构，那么要求轮盘表面上A点的位移，该如何求？

★ 下面我们就以杆件单元上某点位移与单元节点位移之间的关系推导如何求无节点单元上某点的位移。

任意拿一杆件单元来分析：



- ①当i端自由运动，j端固定，i端发生微小位移时，由于位移微小，假设杆单元上各点位移呈线性关系，如图中线性位移 \vec{u}_i 。
- ②当j端自由运动，i端固定，j端发生微小位移时，由于位移微小，假设杆单元上各点位移呈线性关系，如图中线性位移 \vec{u}_j 。



假设杆单元长度为1, 距离j点为x长度的点的位移为 \vec{u}_x , 那么x点的位移与i,j点位移之间的关系为: $\vec{u} = \sum_i N^i(x) \vec{u}^i = N^i(x) \vec{u}^i + N^j(x) \vec{u}^j$

$N^i(x)$ 表示i点的形函数, \vec{u}^i 表示i点的位移

$N^j(x)$ 表示j点的形函数, \vec{u}^j 表示j点的位移

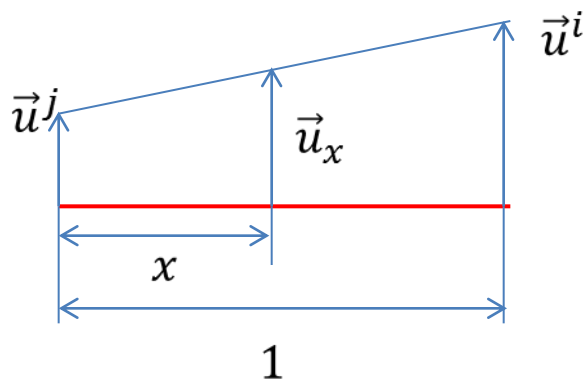
由左边杆单元

$$x=0 \text{ 时 } \vec{u}(0) = \vec{u}^j$$

$$x=1 \text{ 时 } \vec{u}(1) = \vec{u}^i$$

由此猜想怎样求形函数 $N^i(x)$, $N^j(x)$ 且能使 $\vec{u}(x) = \begin{cases} x=0 \text{ 时 } \vec{u}(0) = \vec{u}^j \\ x=1 \text{ 时 } \vec{u}(1) = \vec{u}^i \end{cases}$

下面来做分析形函数求法 (线性变形)



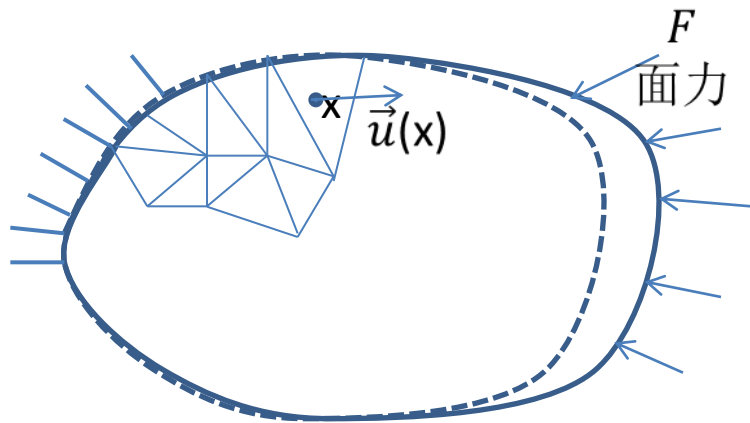
$$\frac{\vec{u}(x) - \vec{u}^j}{\vec{u}^i - \vec{u}^j} = \frac{x}{1}, \vec{u}(x) = (1-x)\vec{u}^j + x\vec{u}^i$$

$$\therefore N^i(x) = x, N^j(x) = 1-x$$

杆件的伸长量 Δl 是关于i点位移 $\vec{u}^i = (u_x^i, u_y^i)$ 和j点位移 $\vec{u}^j = (u_x^j, u_y^j)$ 的函数所以 ϵ 亦是i,j两点位移的函数

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = f(u_x, u_y), \text{ 又因为 } \epsilon_x = \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \sigma_x = E \epsilon_x$$

所以只要知道位移 $\vec{u}(x) \rightarrow \epsilon_x \rightarrow \sigma_x$



无节点物体，内部点的位移的处理方法

物体受力后变形如图虚线部分所示，如何求物体表面上x点的位移 $\vec{u}(x)$ 在这种没有节点的物体上，要想用上面分析杆件问题，由节点位移形函数，求单元内部点的位移的方法，必须对物体用三角形网格进行离散，在物体内部形成一个个三角形单元，对包括x点的单元进行分析：

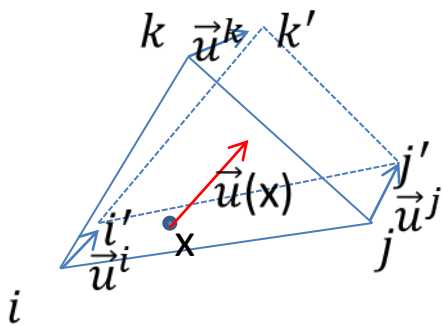
引入求位移的函数

$$\vec{u}(x) = \bar{u}(x) = \sum_{i=1}^3 N^i(x) \bar{u}^i$$

$N^i(x)$ 某节点i位移的形函数， \bar{u}^i 某节点i的位移

若位移求得便可以求出某点应变 $\epsilon(\frac{\partial u(x)}{\partial x}, \frac{\partial u(x)}{\partial y}, \frac{\partial u(x)}{\partial z})$

$\bar{u}(x) \rightarrow \epsilon(\gamma切应变) \rightarrow \sigma(\tau) \rightarrow F_i^j$ (边界上的面力)



变形前后三角形单元各节点位移如图变化x点的位移如红色部分所示

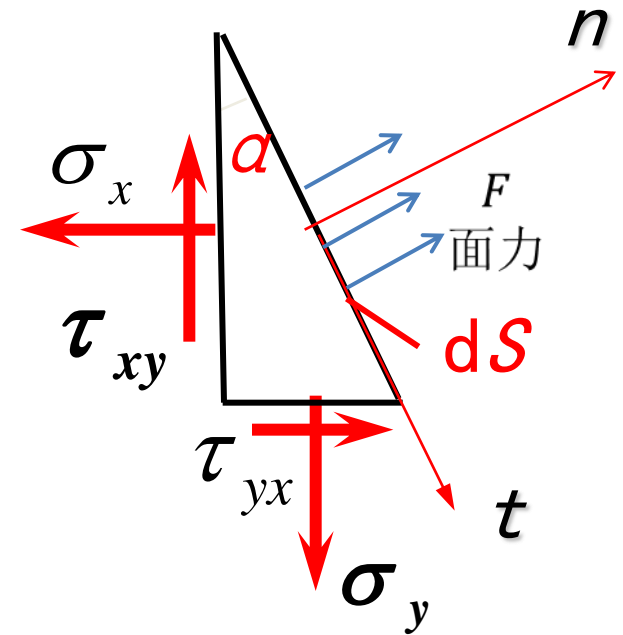
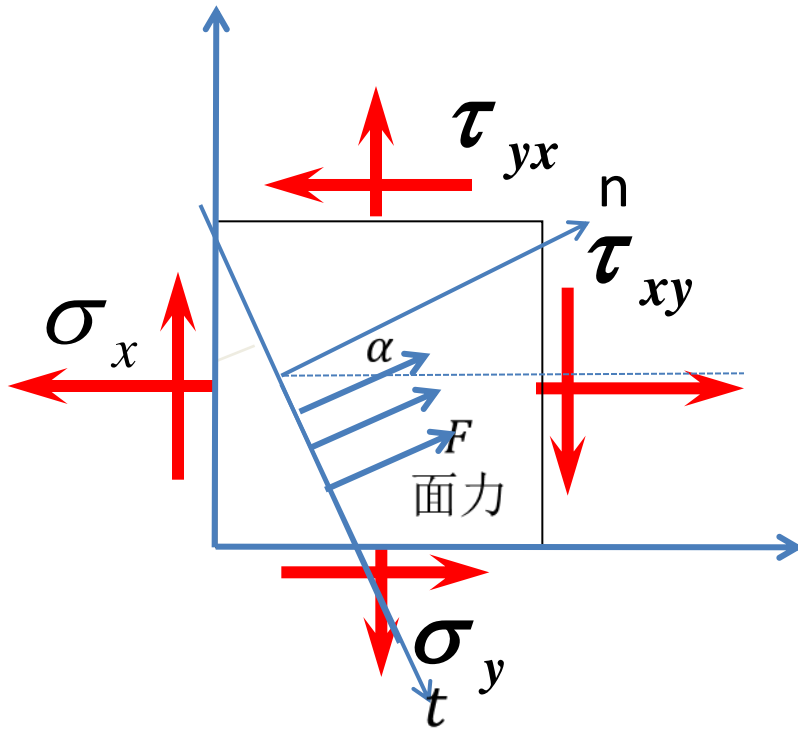


研究面力 F 与应力 σ , τ 之间的关系

①平面应力状态下:

回顾材料力学中平面应力状态下, 单元体某斜截面上的正应力与切应力的求法

1. 斜截面上的应力



列平衡方程

$$\sum F_x = 0$$

$$F_x ds - \sigma_x \cos \alpha ds + \tau_{yx} \cos \beta ds = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_y ds + \tau_{xy} \cos \alpha ds - \sigma_y \cos \beta ds = 0$$

过任意一点 A 的斜面面力矢为 \vec{F}

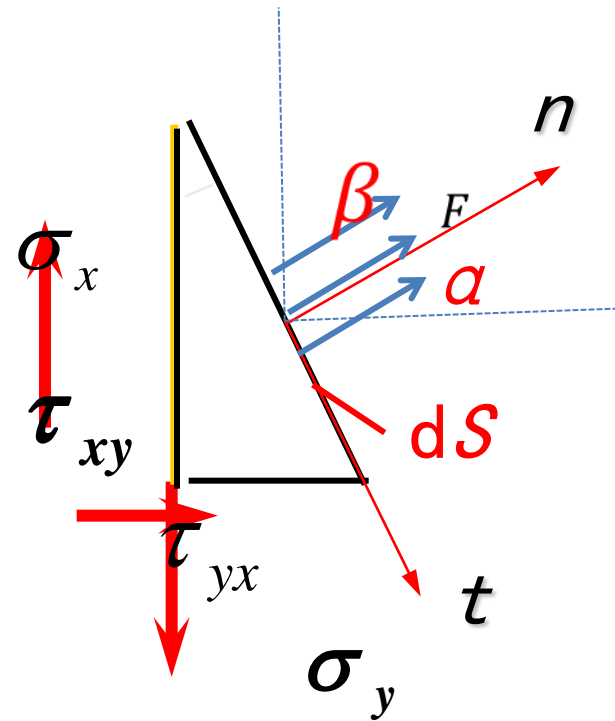


该截面的法向量 \vec{n} 的方向余弦 $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta)$

平面上某一点处的面力集度与应力的关系:

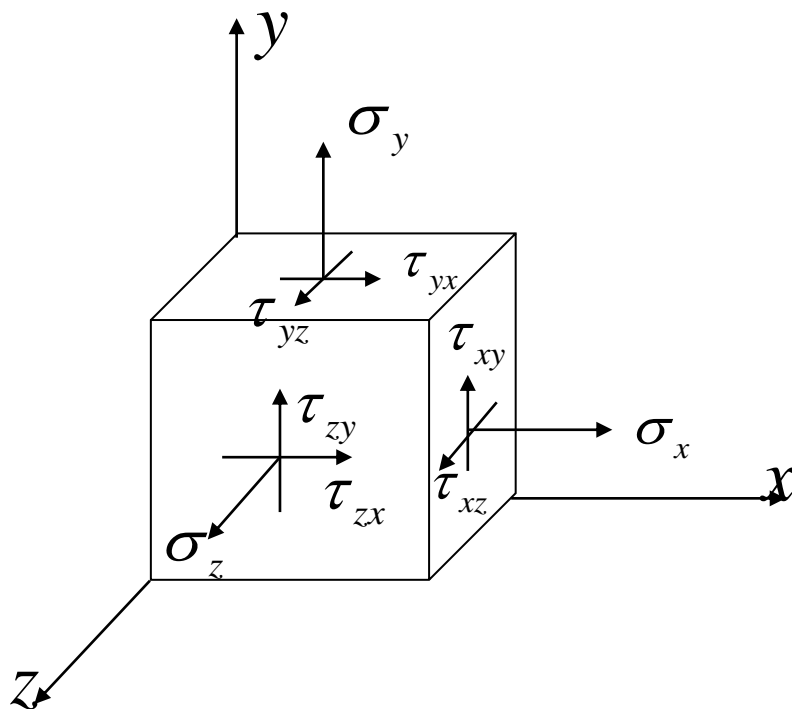
$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & -\sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \end{bmatrix}$$

可以想象，当应力单元体取自物体的表面，且我们分析的单元体上的斜截面的法向量刚好跟所取单元体那里一点的法向量相同，则 F 就表示物体表面上的面力。



②三维空间应力状态下

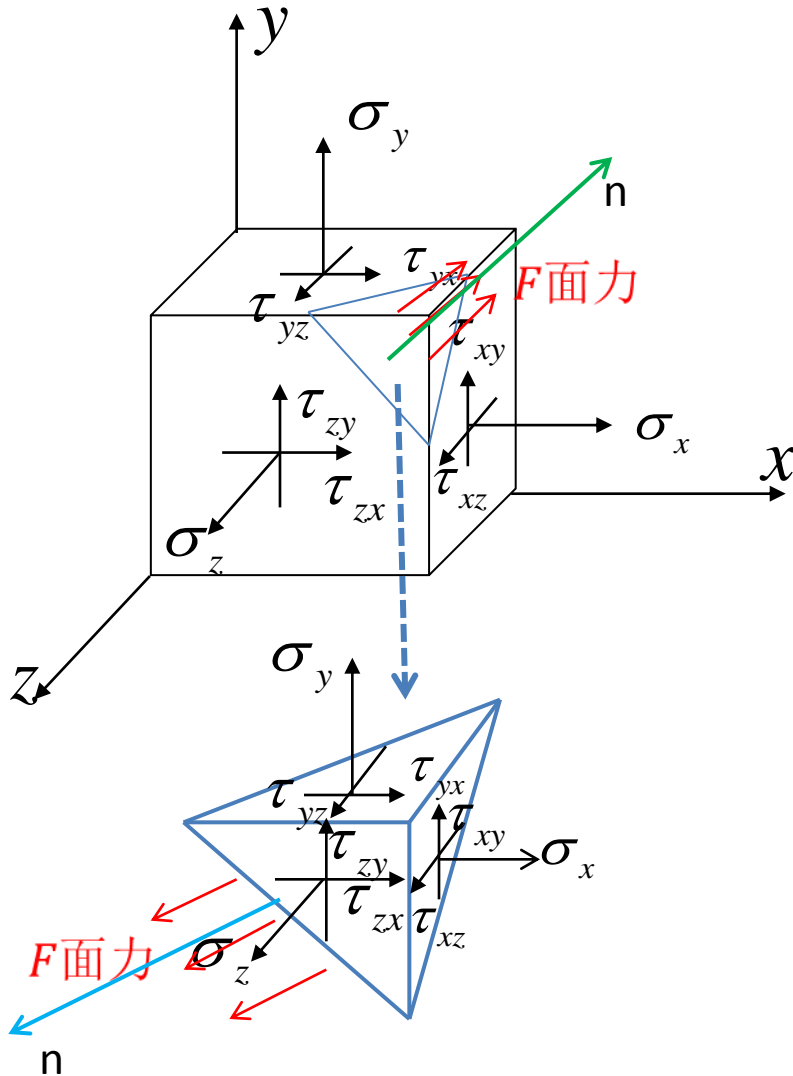
应力状态的一般情况



$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

九个应力分量
中只有六个独立的
应力分量

列平衡方程



过空间某一点的斜截面，面力矢为 F ，法向量为 n ，
法向量的方向余弦 $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_x ds + \sigma_x ds \cos \alpha + \tau_{yx} ds \cos \beta + \tau_{zx} ds \cos \gamma = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_y ds + \tau_{xy} ds \cos \alpha + \sigma_y ds \cos \beta + \tau_{zy} ds \cos \gamma = 0$$

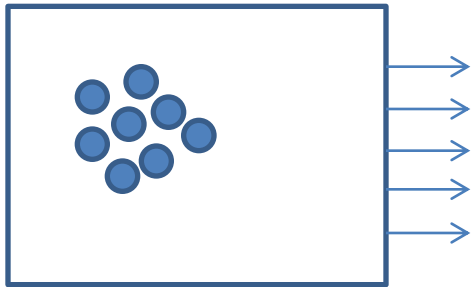
$$\sum F_z = 0$$

$$-F_z ds + \tau_{xz} ds \cos \alpha + \tau_{yz} ds \cos \beta + \sigma_z ds \cos \gamma = 0$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}$$

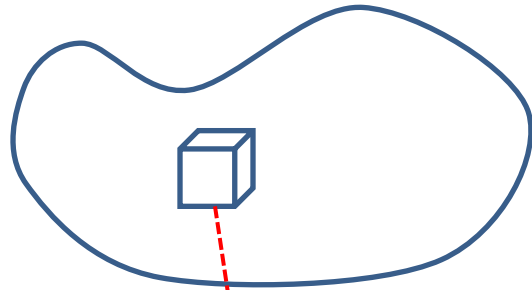
第六讲：弹性力学中的平衡方程与张量表示



铁素体内部结构

✿ 因为分子间并非紧密无间隙排列的，如图中的铁素体之间的分子排列形式，所以无法单独对一个分子来受力分析（因为不仅只有分子作用力），对此类物体的分析，就用一个单位单元来包括一部分物体，将单元包围的所有介质看成一个整体，进行受力分析，来近似代替一个单元内所有分子的受力状态，这就是连续介质力学中的均质化方法，同时又要用到等效理论，以上所做的工作目的就是为了求 E （弹性模量）， ν （泊松比）。

✿ 取物体内部一立方块对其进行受力分析，先于材料力学上的某一点应力状态的单元体区分开，从宏观层面来考虑。



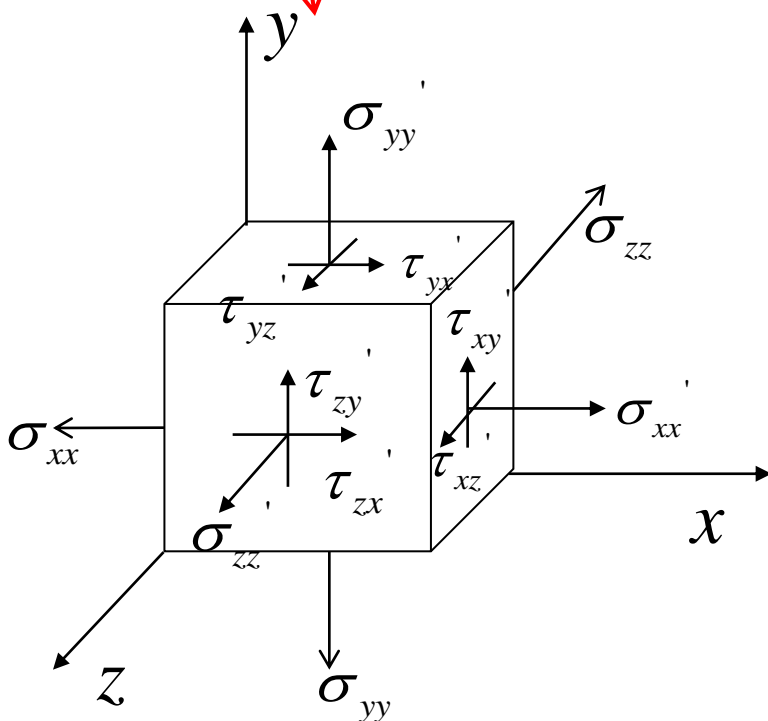
$\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ 均是应力张量，均是位置 x, y 函数
 即 $\sigma_{xx}(x, y, z), \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{xz}(x, y, z)$ 是
 $p(x, y, z)$ 位置函数，类似位移 $\vec{u}(p)$ 是点 p 的位
 置函数。

x 正面上的面力和负面上的面力存在如下关系

$$\sigma_{xx}' = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$$

$$\tau_{xy}' = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$$

$$\tau_{xz}' = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$$



y正面上的面力和负面上的面力存在如下关系

$$\sigma_{yy}' = \sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy$$

$$\tau_{yx}' = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

$$\tau_{yz}' = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$$

y正面上的面力和负面上的面力存在如下关系

$$\sigma_{zz}' = \sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz$$

$$\tau_{zx}' = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$$

$$\tau_{zy}' = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$$

x方向受力平衡

$$(\sigma_{xx}' - \sigma_{xx}) dydz + (\tau_{yx}' - \tau_{yx}) dx dz + (\tau_{zx}' - \tau_{zx}) dx dy = 0$$

$$\text{简化得: } \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

同理由y方向受力平衡，可简化得

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

同理由z方向受力平衡，可简化得

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0$$

综合x, y, z方向受力平衡的结果得到三个式子

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0$$

表示成张量的形式

$\sigma_{ij,j} = 0$ 其中“，”逗号表示对其后面的量求偏导，其中ij为指标， $\sigma_{ij,j}$ 是指标符号关于指标运算，有一个约定，即爱因斯坦（Einstein）求和约定：

在一个式子的某一项中，如果有一个指标出现两次，则这一项就应对这一指标的所有允许值求和。例如 $\sigma_{ij,j}$ 中指标j重复出现两次则 $\sigma_{ij,j} = \sigma_{ix,x} + \sigma_{iy,y} + \sigma_{iz,z} = 0 (j = x, y, z)$

不重复出现的指标i称为自由指标，取一个值对应一个方程，即x=i时上式变成

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} = 0; x = y \text{ 时 } \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} = 0; x = z \text{ 时 } \sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z} = 0.$$

若考虑在动力平衡条件下建立平衡方程引入位移 $\bar{u}(x, y, z, t)$

对 x 方向受力分析, 应用牛顿第二定律可知

$$(\sigma'_{xx} - \sigma_{xx})dydz + (\tau'_{yx} - \tau_{yx})dxdz + (\tau'_{zx} - \tau_{zx})dxdy + f_x = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}(x, y, z, t)}{\partial t^2} dxdydz$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = \rho \ddot{u}_x$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = \rho \ddot{u}_y$$

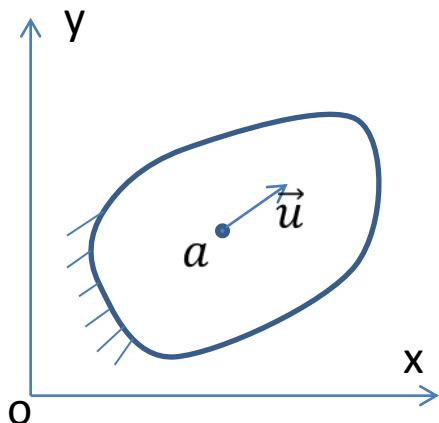
$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + f_z = \rho \ddot{u}_z, (f_x, f_y, f_z \text{ 表示体积力, } \rho \text{ 表示密度})$$

所以在实际问题中我们要求的量有

$u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)$, 等各方向的位移分量

要找出 $u \rightarrow \sigma_{ij}$ 的关系, 必须先找出 $u \rightarrow \varepsilon_{ij}$ 的关系, $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ 。

第七讲：位移与应变的关系



a 点坐标为 (x, y, z)

\vec{u} 表示 x 点的位移 $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$

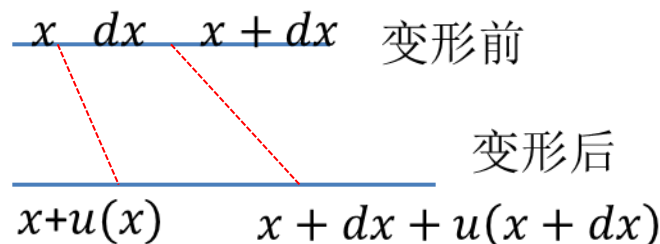
下面推导 ε 与位移的关系

- 在非线性小变形的情况下应用微积分推导位移与应变之间的关系

因为位移

\vec{u} 是位置函数，取原杆件上一微段，微段两端杆件变形后发生的位移分别是 $u(x), u(x + dx)$

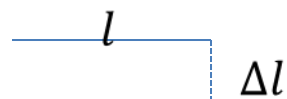
$$u(x) \xrightarrow{dx} u(x + dx)$$



变形后微段的长度：

$$\begin{aligned} dx' &= x + dx + u(x + dx) - x - u(x) \\ &= u(x + dx) - u(x) + dx \\ \Delta l &= u(x + dx) - u(x) + dx - dx = u(x + dx) - u(x) \\ \varepsilon &= \frac{\Delta l}{l} = \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx} \end{aligned}$$

- 一维情况下（小变形）

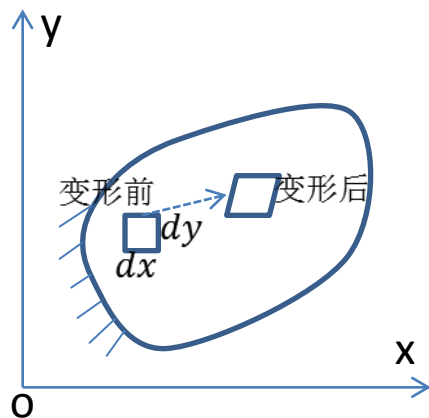


$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

dx 为自变量增量 Δx 的微分
当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + dx) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

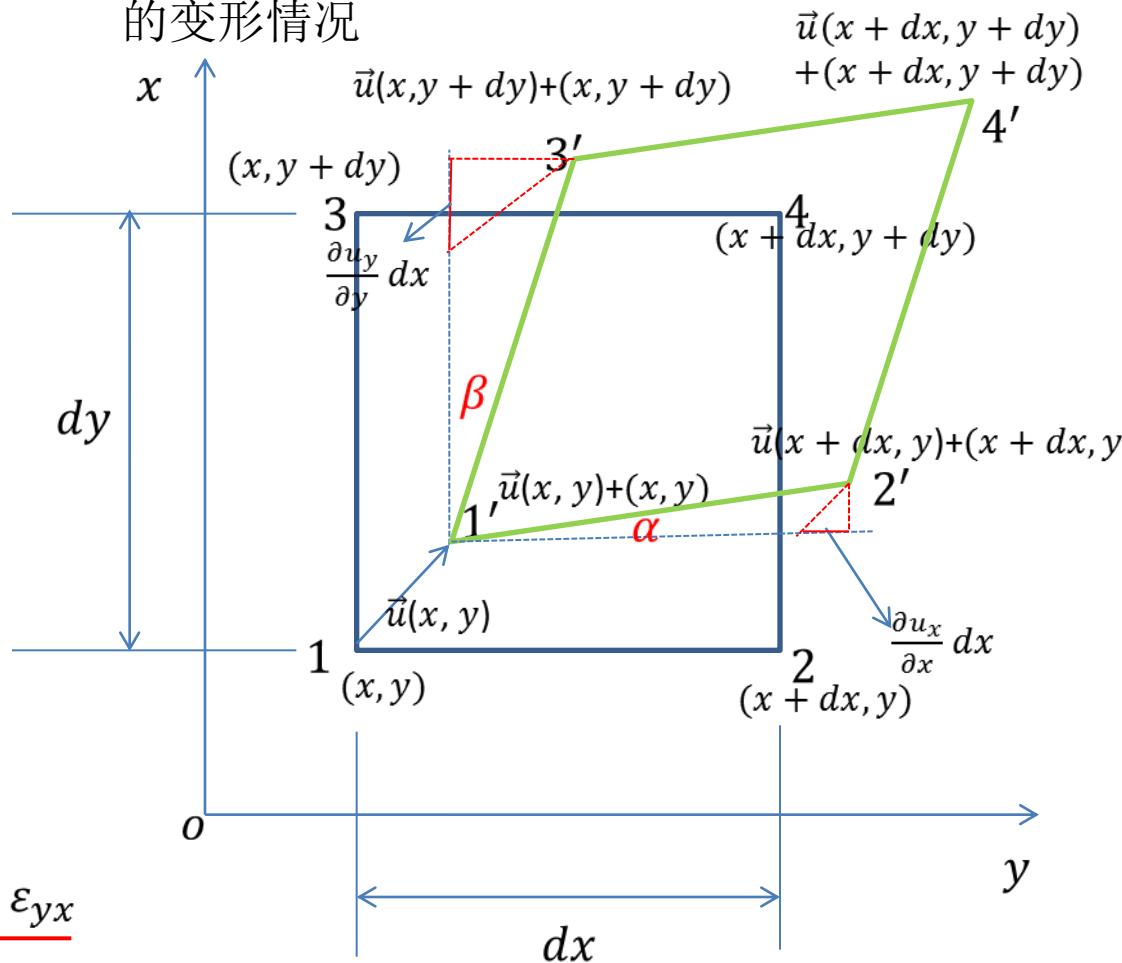
■ 二维情况下（小变形）



取自物体内部一小方块 $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}$

切应变 γ

把物体内一点的微元体取出分析该微元体的变形情况



位移 $\vec{u}(x, y)$ 是位置函数, u_x, u_y 表示位移在 x, y 方向的分量

$$1' \text{点坐标 } \vec{u}(x, y) + (x, y) = (x + \vec{u}_x^1(x, y), y + \vec{u}_y^1(x, y))$$

$$2' \text{点坐标 } \vec{u}(x + dx, y) + (x + dx, y) = (x + dx + \vec{u}_x^2(x + dx, y), y + \vec{u}_y^2(x + dx, y))$$

$$\vec{u}(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y)), \vec{u}(x + dx, y) = (u_x(x + dx, y), u_y(x + dx, y))$$

$$\text{变形后 } 1'2' \text{ 边的长度 } dx' = \sqrt{[(u_x^2 - u_x^1) + dx]^2 + (u_y^2 - u_y^1)^2}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{dx' - dx}{dx}$$

$$\text{其中 } u_x^2 - u_x^1 = u_x^2(x + dx, y) - u_x^1(x, y) = \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} dx$$

$$u_y^2 - u_y^1 = u_y^2(x + dx, y) - u_y^1(x, y) = \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} dx$$

$$dx' = \sqrt{\left[\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} dx + dx\right]^2 + \left(\frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} dx\right)^2} = \sqrt{\left[\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} + 1\right]^2 + \left(\frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x}\right)^2} dx$$

$$\text{由于变形微小, 所以有 } \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} \ll \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} + 1$$

$$dx' = \left(\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} + 1\right) dx, \varepsilon_{xx} = \frac{\left(\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} + 1\right) dx - dx}{dx} = \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x}$$

$$3' \text{点坐标 } \vec{u}(x, y + dy) + (x, y + dy) = (x + \vec{u}_x^3(x, y + dy), y + dy + \vec{u}_y^3(x, y + dy))$$

$$1' \text{点坐标 } \vec{u}(x, y) + (x, y) = (x + \vec{u}_x^1(x, y), y + \vec{u}_y^1(x, y))$$

$$\vec{u}(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y)), \vec{u}(x, y + dy) = (u_x(x, y + dy), u_y(x, y + dy))$$

$$\text{变形后 } 1'2' \text{ 边的长度 } dy' = \sqrt{(u_x^3 - u_x^1)^2 + (u_y^3 - u_y^1 + dy)^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{dy' - dy}{dy}$$

$$\text{其中 } u_x^3 - u_x^1 = u_x^3(x, y + dy) - u_x^1(x, y) = \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} dy$$

$$u_y^3 - u_y^1 = u_y^3(x, y + dy) - u_y^1(x, y) = \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} dy$$

$$dy' = \sqrt{\left(\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} dy\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} dy + dy\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} + 1\right)^2} dy$$

$$\text{由于变形微小, 所以有 } \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} \ll \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} + 1$$

$$dy' = \left(\frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} + 1\right) dy, \varepsilon_{yy} = \frac{\left(\frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} + 1\right) dy - dy}{dy} = \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y}$$

12边变形后的1'2'边的长度 $dx' = (1 + \frac{\partial u_x}{\partial x})dx$

$$\tan \alpha = \frac{u_y^2(x + dx, y) - u_y^1(x, y)}{(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x})dx} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} dx}{(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x})dx} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

小变形条件下 $\tan \alpha = \alpha, \therefore \alpha = \frac{\partial u_y}{\partial x}$

13边变形后的1'3'边的长度 $dy' = (1 + \frac{\partial u_y}{\partial y})dy$

$$\tan \beta = \frac{u_x^3(x, y + dy) - u_x^1(x, y)}{(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y})dy} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} dy}{(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y})dy} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

小变形条件下 $\tan \beta = \beta, \therefore \beta = \frac{\partial u_x}{\partial y}$

$$\gamma = \varepsilon_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

第八讲：弹性力学的基本方程

第七节应变用位移表示的表达式

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y}, \quad \gamma = \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

为了将 ε_{xy} 与 ε_{xx} , ε_{yy} 用张量统一表示, 我们将 $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ 作如下变换

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$$

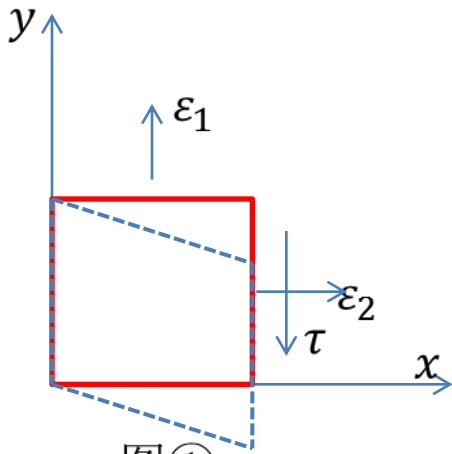
将以上三式表示成张量形式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ 其中逗号 “,” 表示 } u \text{ 的第 } i \text{ 个分量对变量 } j \text{ 求偏导}$$

$$\text{例如 } i = x, j = x \text{ 时 } \varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x}$$

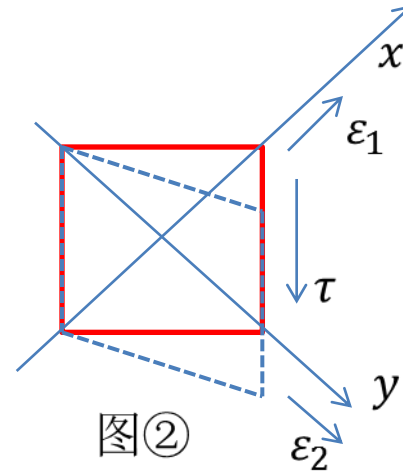
$$i = x, j = y \text{ 时 } \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \gamma_{xy}$$

$$i = y, j = y \text{ 时 } \varepsilon_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y}$$



图①

在图①这种坐标系下 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$
 即沿xy方向无应变, $\gamma = \frac{\tau}{G}$

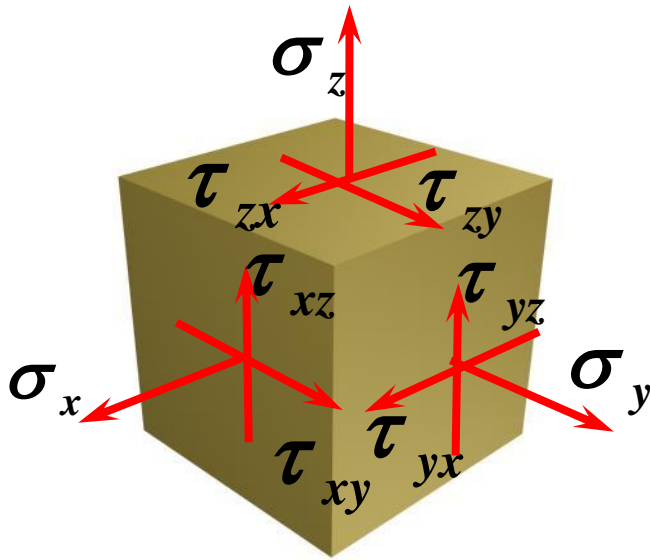


图②

在图②这种坐标系下 ε_1 、 ε_2 都不
 为零即沿xy方向有应变, $\gamma = \frac{\tau}{G}$

由以上可知, 两种不同的参考坐标系下, **E**、**G**一定存在
 一定的关系即 $G=f(\nu, E)$, ν 表示泊松比, 也就是我们熟
 知的 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 。

由材料力学中广义胡克定律一般形式



$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

有上面的应力应变关系，推导出一般的张量表达式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

其中 $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ ，克罗内克符号 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

平面应力状态下例如当 $i = x, j = y$ 时 $\because i \neq j$

$$\therefore \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \times 0 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}$$

$$\because \sigma_{xy} = \tau_{xy}, G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \therefore \varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}$$

$$\text{又 } \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y},$$

$$\text{由 } \varepsilon_{xy} \text{ 张量表达式知 } \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

由 $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ 可以推出用 ε_{ij} 表示 σ_{ij} 的表达式

引入拉梅系数 $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\nu G}{1-2\nu}$ 那么由应变的分量式

可以推出应力的分量式 $\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$

将以上求得的 $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ 带入应变关系式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ 得到}$$

$$\sigma_{ij} = G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij}$$

由应力单元体的平衡方程的张量表达式 $\sigma_{ij, j} = 0$

$$\text{即 } G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \lambda u_{k,kj} \delta_{ij} = 0 \left(u_{i,jj} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = u_{i,xx} + u_{i,yy} + u_{i,zz} \right)$$

动态时的平衡方程张量表达式

$$G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \lambda u_{k,kj} \delta_{ij} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

一般微分方程都包含了面力位移边界条件 $\begin{cases} \bar{u}_i = \bar{u}_i & \text{位移边界条件} \\ \bar{p}_i = \bar{p}_i & \text{面力边界条件} \end{cases}$

前面我们推导出，单元体斜截面上的面力与单元体的应力之间的关系

$$\bar{p}_i = \sigma_{ij} \cdot n_j = [G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \frac{\lambda}{2}(u_{k,k} + u_{k,k}) \delta_{ij}] n_j$$

下面介绍一些常见的微分方程的表示形式

$$\text{热传导方程: } \nabla^2 T = 0 \Rightarrow T_{,ii} = 0$$

$$\text{稳态热传导方程: } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

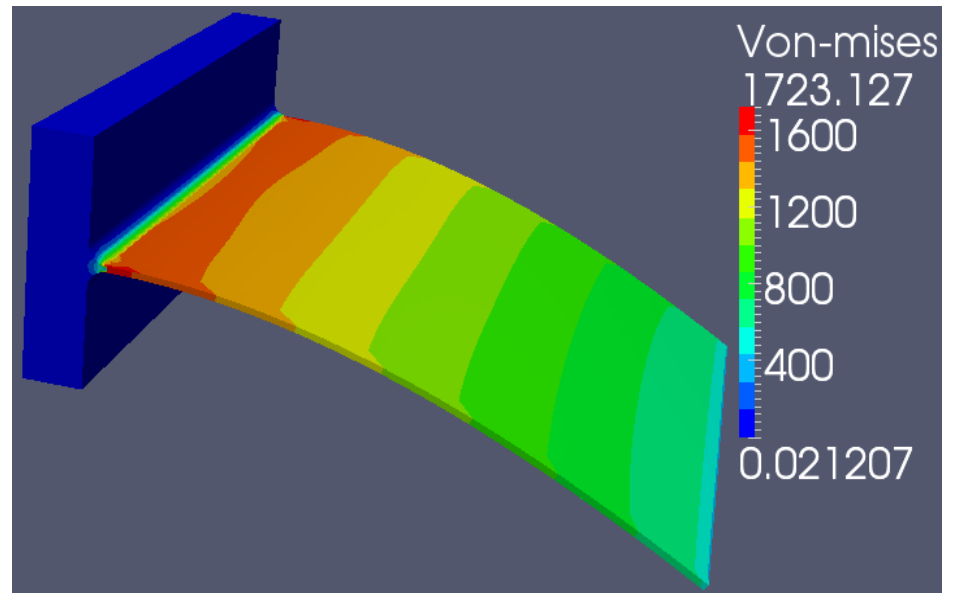
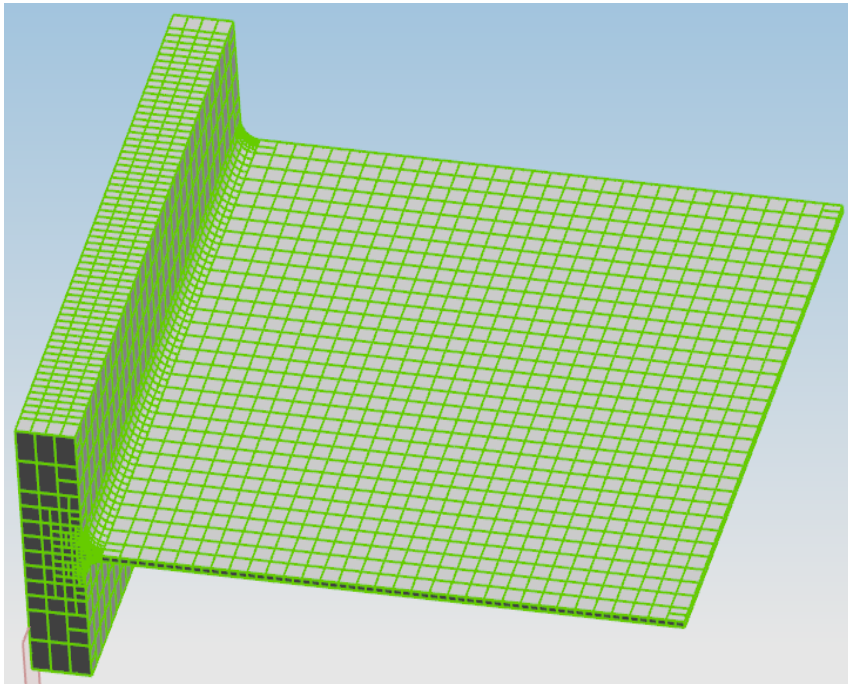
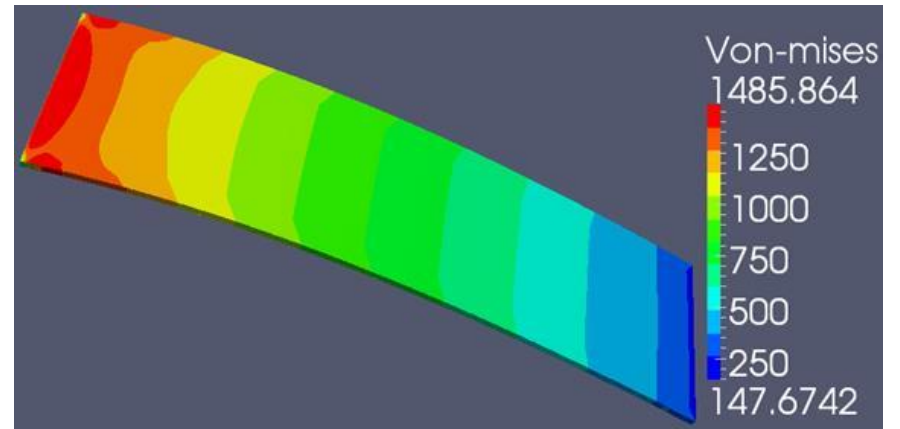
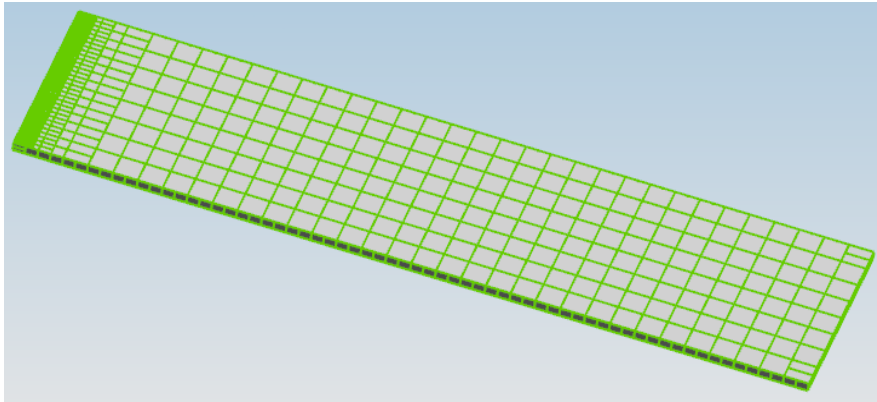
$$\text{非稳态热传导方程: } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + s = \rho \frac{\partial T}{\partial t}$$

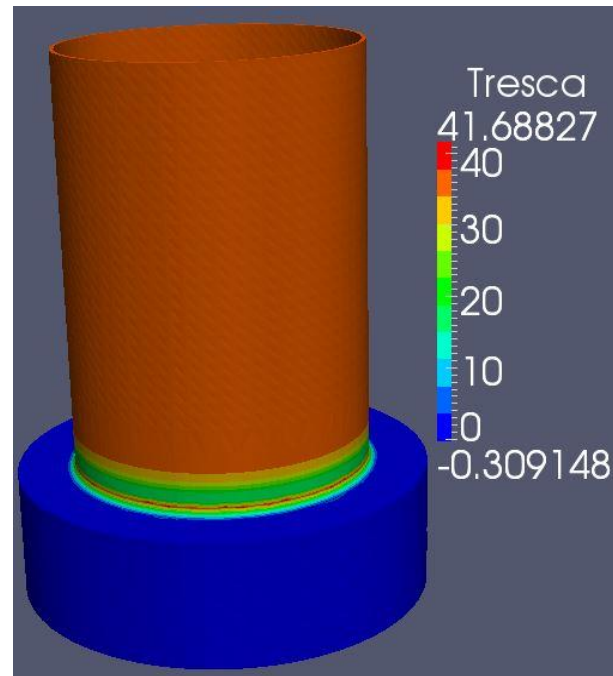
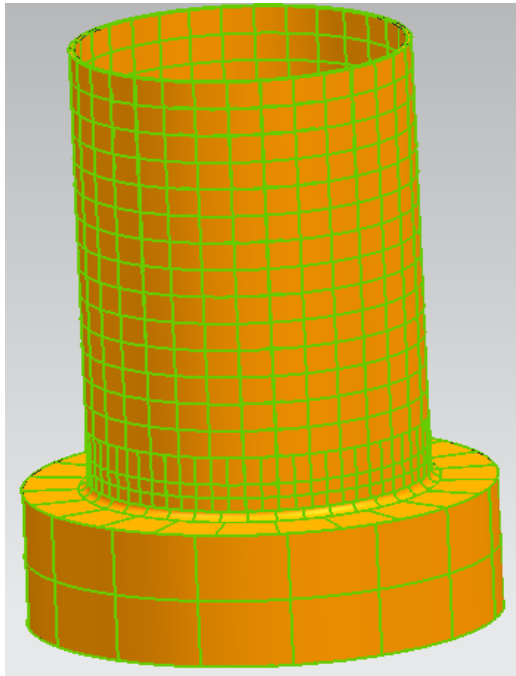
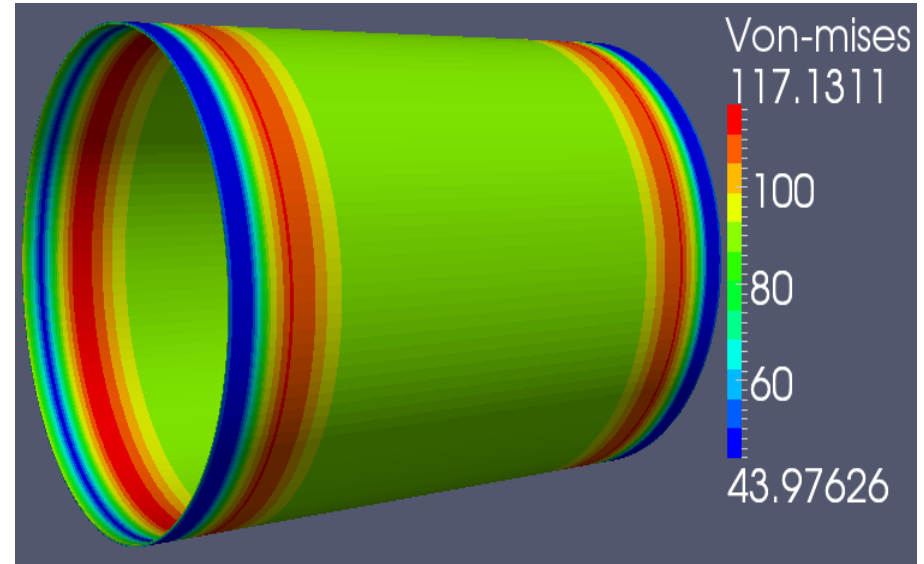
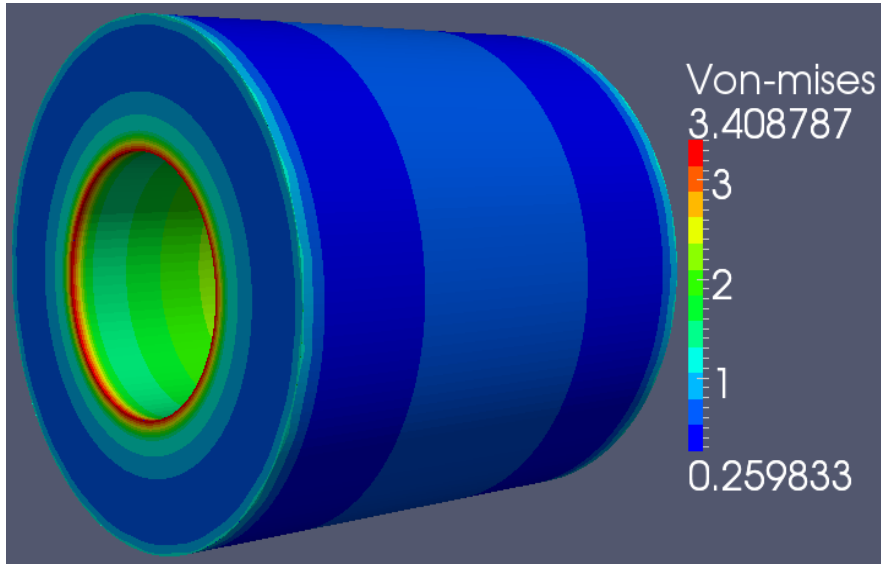
纠缠多年的双层插值问题终于解决，意味着5aCAE软件开发最后一道坎清除。早前肾结石掉落，现今心结石消失，好事逢双，顿觉身轻。信步于桃子湖畔，看满塘莲荷，绿肥红艳，吟成七律一首，以志纪念。

出泥浮水露玉萍
渐展渐张满塘青
点点燃红千柱蜡
田田遮暗一底荫
风来影破归兰桨
雨去盘倾滚冰晶
历尽炎凉成正果
清甜犹有忆苦心

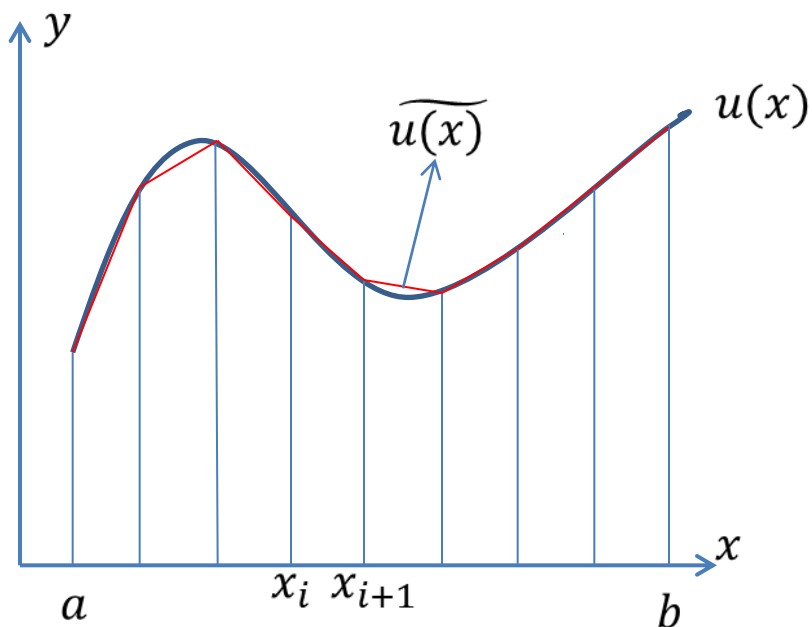
小注：

点点=离散； 田田=连续； 点点+田田=双层插值





第九讲：函数近似

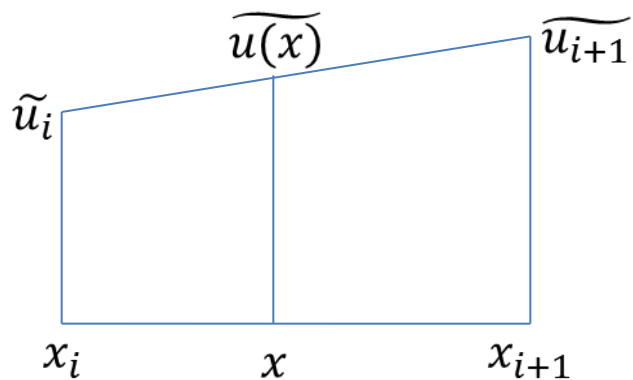


将 (a, b) 区间离散成一个个的曲边梯形，再将每个曲边梯形的曲边的端点用直线连接起来，这样每个曲边梯形就变成了一个个的直边梯形。代替曲边的直边所形成的折线图形，我们用函数 $\overline{u(x)}$ 表示。每个直边梯形的斜边段都是直线，我们用 $\overline{u(x)} = ax + b$ 来表示折线方程，去代替对应的曲线方程 $u(x)$ 。

$\overline{u(x)}$ （红色线所示）表示近似函数的图像。

$u(x)$ 表示原函数的图像,函数自变量区间为 $x \in (a, b)$ 。

取 $x_i x_{i+1}$ 这一直边梯形来分析



这里的 $N_i(x) N_{i+1}(x)$ 是针对 $x_i x_{i+1}$ 这一小段上的局部型函数，下面我们推导全局形函数

$$u(x) = N_i(x)u_i + N_{i+1}(x)u_{i+1}$$

$$= \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} u_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} u_{i+1}$$

在规则化区间上

$$u(x) = (1 - x)u_i + xu_{i+1} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

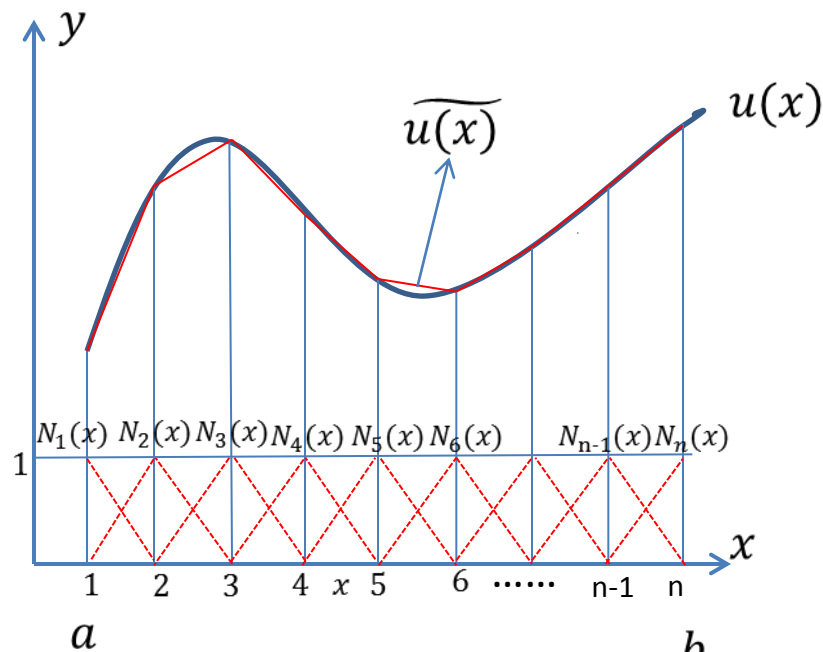


图 (1)

全局形函数 $N_i(\mathbf{x})$ ，就是如图（1）所示，节点为 i 的这条竖直线上， $y=1$ 处向相邻两个节点延伸出的红色虚线组成的三角形部分
 当 $x = x_i$ 时 $N_i(\mathbf{x}) = 1$ (即本节点处形函数的值为1)

而在本节点的形函数在其他节点的取值为零即 $N_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

$$u(\mathbf{x}) = \sum_1^n N_i(\mathbf{x})u_i = N_1(\mathbf{x})u_1 + N_2(\mathbf{x})u_2 + \cdots + N_{n-1}(\mathbf{x})u_{n-1} + N_n(\mathbf{x})u_n$$

对于一次单元近似函数 $u(\mathbf{x})$ 在节点处是不能求导的

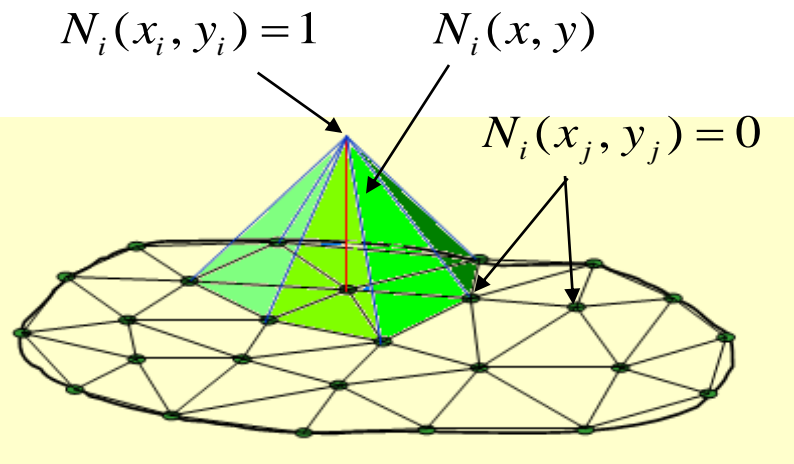
我们从图（1）可以看出形函数都是针对节点而言的，本节点的形函数的影响范围是与本节点相邻的两个节点之间的范围，对此作如下解释：

假设 x 是位于图（1）中4、5节点之间的点，这时对 x 点的函数值 $u(x)$

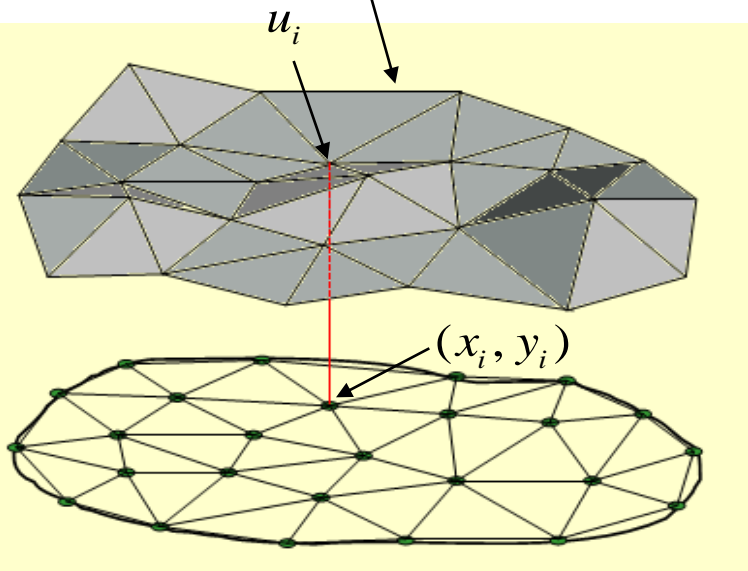
有影响的节点只有4、5两节点，因为从形函数的性质，和 $u(x)$ 的表达式可知，所有节点的形函数中只有 $N_4(x)$ ， $N_5(x)$ 不为零，其他节点的形函数值均为零，即 $N_1(x)=N_2(x)=N_3(x)=N_6(x)=\cdots=N_{n-1}(x)=N_n(x)=0$ ，

那么就可以推出 $u(x)=N_4(x)u_4+N_5(x)u_5=ax+b$ ，由图上可知形函数的图像是一次的，那么求和之后的形函数仍然是一次的，也就是我们最初由曲边梯形的曲边弧的两端点连成的直线。

二维形函数的图像如下图所示



$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i$$



引进面积坐标的形函数，详见《有限单元法》P105，这里不做详细介绍

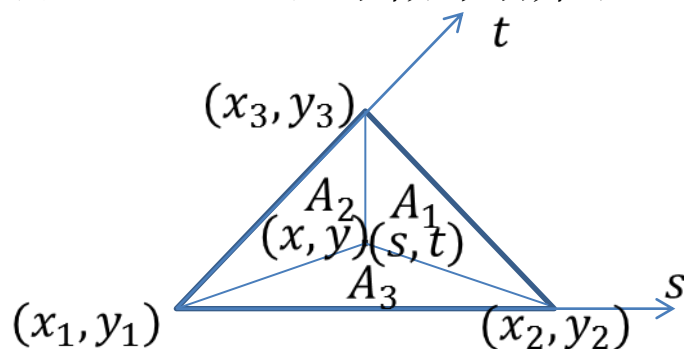


图 (2)

面积坐标下的形函数代替直角坐标下的二阶拉格朗日形函数即 $N_1(x) = L_1$, $N_2(x) = L_2$, $N_3(x) = L_3$, 这里 $N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$ 都是一次曲面。

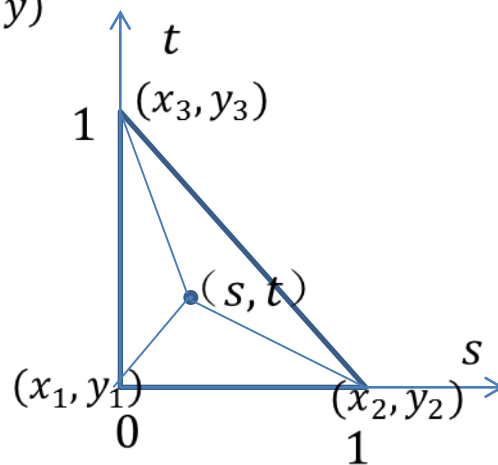
$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1(x, y) + N_2(x, y)u_2(x, y) + N_3(x, y)u_3(x, y) = L_1u_1(x, y) + L_2u_2(x, y) + L_3u_3(x, y)$$

将图 (2) 化为规则化坐标下，形函数：

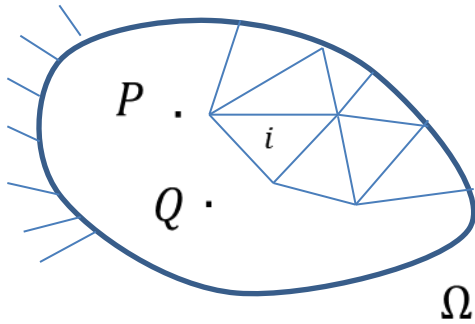
$$L_1 = 1 - s - t$$

$$L_2 = s$$

$$L_3 = t$$



第十讲：有限元法



P, Q 是 Ω 内两点

通过对结构用三角形网格按规则细分进行离散，图中 i 单元内某点 (x, y) 的位移可用如下式子表示

$$u_i(x, y) = \sum_{k=1}^3 N_i(x, y) u_i^k$$

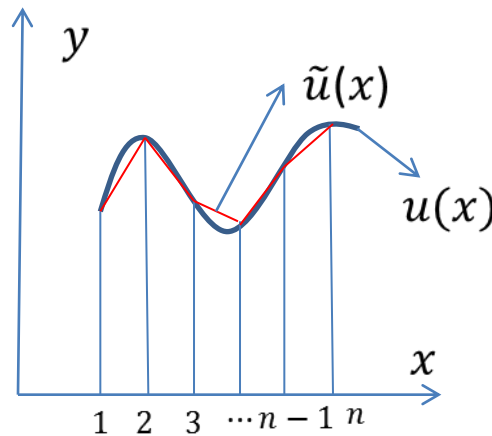
K 表示 i 单元内的节点

上节得出近似原函数的近似函数（一维情况）

$$u(x) = \sum_1^n N_i(x) u_i = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 + \cdots + N_{n-1}(x) u_{n-1} + N_n(x) u_n$$

其中 $N_1(x), N_2(x) \cdots N_n(x)$ 都是一次线性函数，这就造成 $u(x)$ 在节点 $i = 1, 2, \dots, n$ ，处不可导

用图像解释如下：

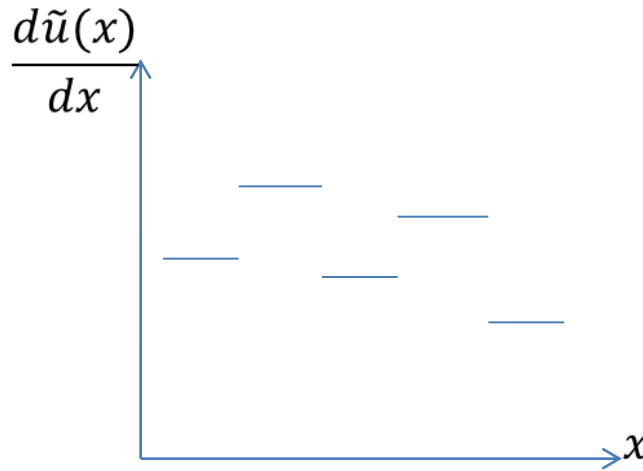


$\tilde{u}(x)$ 在每两个插值点之间的图像都是直线即一次线性函数，在插值点处左右两侧斜率不同，由可导的定义可知 $\tilde{u}(x)$ 在节点处是不可导的。

下面比较用 $u(x) = \sum_1^n N_i(x)u_i$ 去近似计算 $u(x)$ 和用 $\int \frac{du(x)}{dx} dx$ 去近似计算 $u(x)$ 的误差

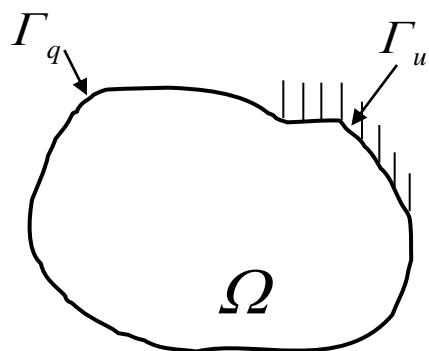
$\int \frac{du(x)}{dx} dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} \Delta x$, 每段 $\frac{du(x)}{dx}$ 是一个常数, 即两个节点间的 $u(x)$ 的导数为常数。

图像如下:



由图像可知每段 $\frac{dũ(x)}{dx}$ 形成的图像与原函数 $u(x)$ 的图像差别比较大, 相对来说 $ũ(x)$ 更接近 $u(x)$ 的图像, 所以用 $ũ(x)$ 来近似计算 $u(x)$ 误差更小些。

二维稳态热传导问题



$$\Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{在}\Omega\text{内})$$

$$\text{张量形式 } u_{,ii} = 0$$

$$u - \bar{u} = 0 \quad (\text{在}\Gamma_u\text{上})$$

$$k \frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q} = 0 \quad (\text{在}\Gamma_q\text{上})$$

等效弱积分形式

$$\int_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy + \int_{\Gamma_q} \bar{v} \left(k \frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma = 0$$

其中 v 为任意函数

由于

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

得到

$$\int_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy$$

$$= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial x} n_x + v \frac{\partial u}{\partial y} n_y d\Gamma$$

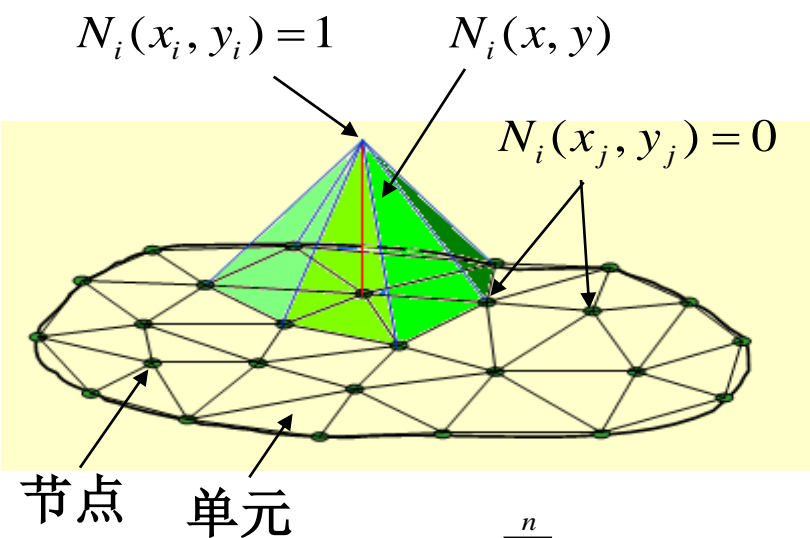
$$= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

于是

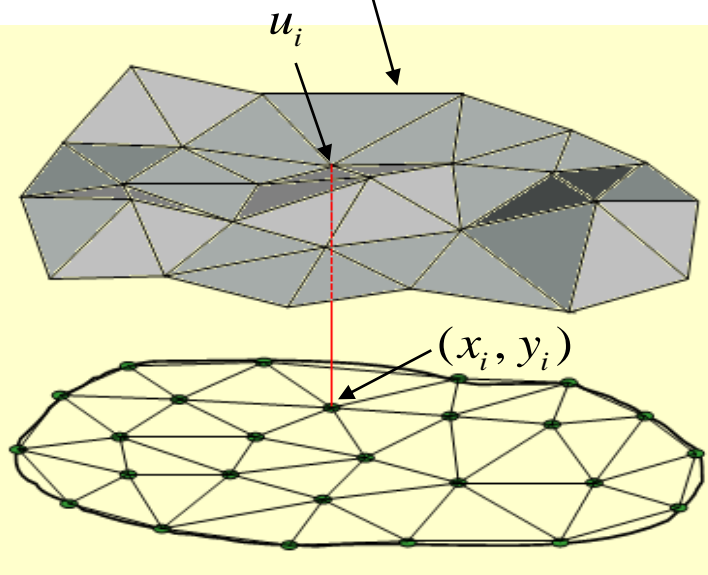
$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy + \int_{\Gamma_q} \bar{v} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{v} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma_q} (v + \bar{v}) \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \bar{v} \bar{q} d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned}$$

假定 $v = -\bar{v}$ ，且在 Γ_u 边界上 $v = 0$ ，得到

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma_q} v \bar{q} d\Gamma$$



$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i$$



将未知函数 u 近似为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + \cdots + N_n u_n \\ &= \sum_{j=1}^n N_j(x, y) u_j \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \times u_j \\ &= \int_{\Gamma_q} v \bar{q} d\Gamma \end{aligned}$$

由于 v 是任意的，令 v 分别等于 N_1 到 N_n ，就得到 n 个代数方程

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \times u_j = \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q} d\Gamma \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

用矩阵表示为

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad a_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad f_i = \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q} d\Gamma$$

A矩阵是带状矩阵，解释如下：

在积分 $a_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy$ 中积分区域为 Ω

也就是说只有当形函数 N_i, N_j 的函数图象有公共部分 Ω_i 时

$$上述积分 a_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \neq 0$$

如果形函数 N_i, N_j 的函数图象没有公共部分上述积分 $a_{ij}=0$ 。

以右图为例，两个图形分别是形函数 $N_1(x, y), N_6(x, y)$ 的图象

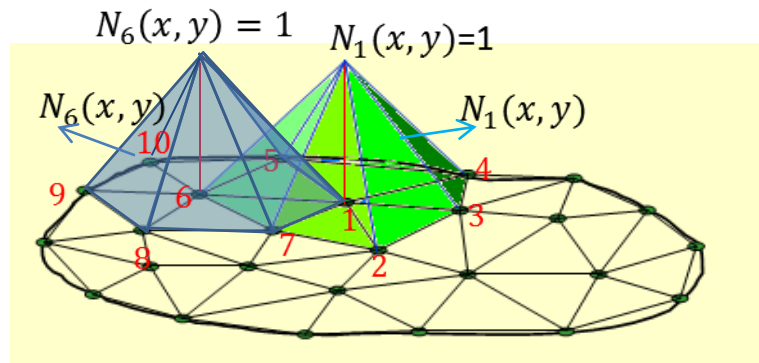
从图中我们不难看出 $N_1(x, y), N_6(x, y)$ 有公共部分所以积分

$$a_{16} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_6}{\partial y} \right) dx dy \neq 0, \text{ 矩阵 } A \text{ 中第一行表示的意思是}$$

当 $i=1$ 时 $j=1, 2, 3, \dots, n$ 时的积分 a_{ij} ，由上面的例子我们可以知道

在第一行中不为零的元素就是与1节点相邻的节点2, 3, 4, 5, 6, 7

所得到的积分 $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}$ 。由此不难可以推出每一行不为零元素的位置，这些不为零的元素刚好集中在主对角线附近，在矩阵A呈现带状分布。

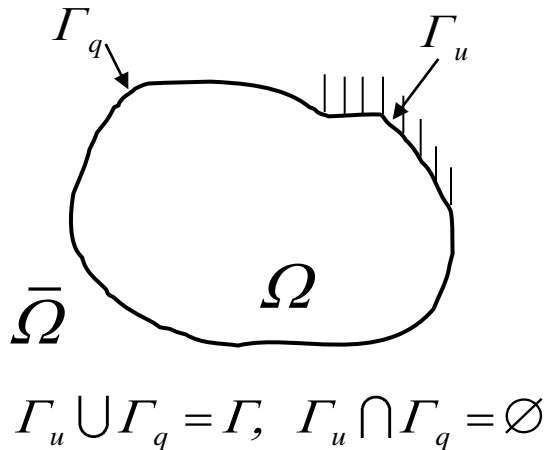


$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{11} \end{bmatrix}$$

带状部分分布在两条红色线之间的区域，其余部分均为0

边界元法 (BEM)

二维稳态热传导问题



$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内})$$

$$u - \bar{u} = 0 \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 上})$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q} = 0 \quad (\text{在 } \Gamma_q \text{ 上})$$

在有限元法的推导过程中，我们得到

$$\int_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

对 $\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$ 继续用分部积分

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x} u n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u dx dy$$

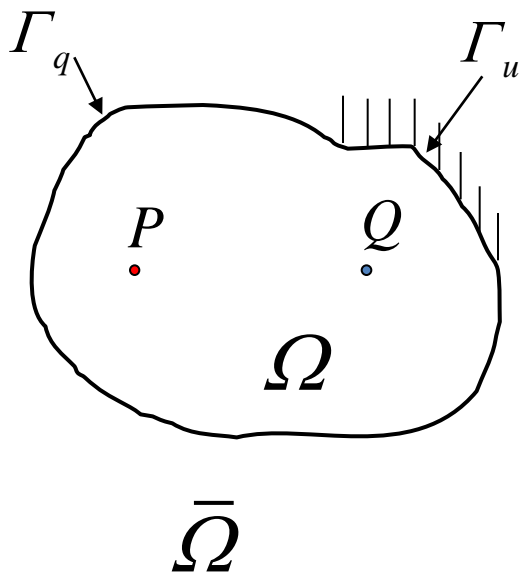
$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy = \oint_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial y} u n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} u dx dy$$

从而有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dx dy - \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) u d\Gamma + \oint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} u \nabla^2 v d\Omega - \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial n} u - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

即

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 v d\Omega = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial n} u - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma$$



由于 v 是任意的, 令

$$\nabla^2 v = \delta(Q, P) \quad v = \frac{1}{2\pi} \ln r(Q, P)$$

$$r(Q, P) = \sqrt{(x(Q) - x(P))^2 + (y(Q) - y(P))^2}$$

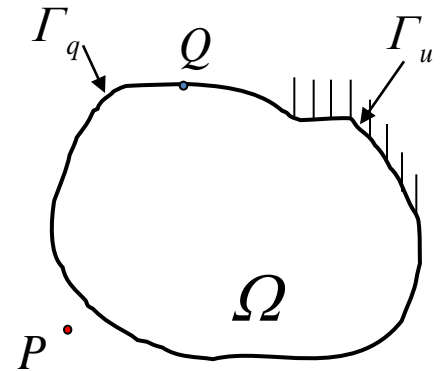
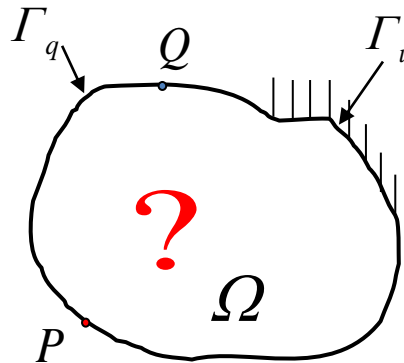
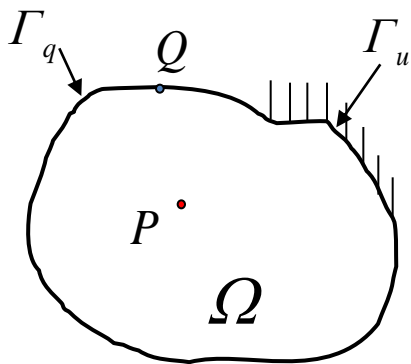
由 δ 函数的性质

$$\int_{\Omega} \delta(Q, P) u d\Omega = \begin{cases} u(P), & \forall P \in \Omega \\ 0, & \forall P \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

得到

$$u(P) = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} u(Q) - v(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q) \right) d\Gamma(Q), \quad \forall P \in \Omega$$

$$0 = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} u(Q) - v(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q) \right) d\Gamma(Q), \quad \forall P \in \bar{\Omega}$$



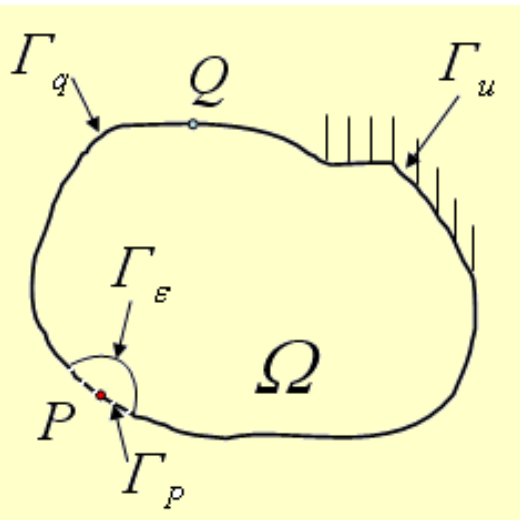
$$\int_{\Omega} \delta(Q, P) u d\Omega = \begin{cases} u(P), & \forall P \in \Omega \\ ? & \forall P \in \Gamma \\ 0, & \forall P \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

当 P 在边界上，如何得到边界积分方程？

有两种途径。

➤ 途径一:

$$\oint_{\Gamma - \Gamma_P + \Gamma_\varepsilon} \left(\frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} u(Q) - v(P, Q) \frac{\partial u(Q)}{\partial n} \right) d\Gamma(Q) = 0$$



其中

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} v(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q) d\Gamma(Q) = \frac{1}{2\pi} \ln(\varepsilon) \varepsilon \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial u}{\partial n}(Q) d\theta$$

应用罗必达法则

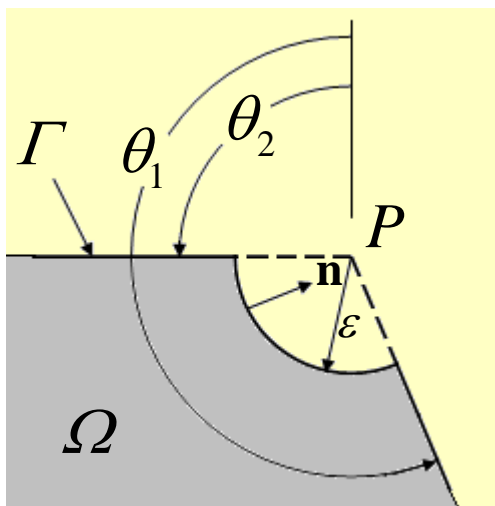
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(\varepsilon) \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\varepsilon)}{\varepsilon^{-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{-1}}{-\varepsilon^{-2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\varepsilon = 0$$

又

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} u(Q) d\Gamma(Q) = \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{\varepsilon} \int_{\theta_1}^{\theta_2} u(Q) \varepsilon d\theta$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{\varepsilon} \int_{\theta_1}^{\theta_2} u(Q) \varepsilon d\theta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} u(P)$$

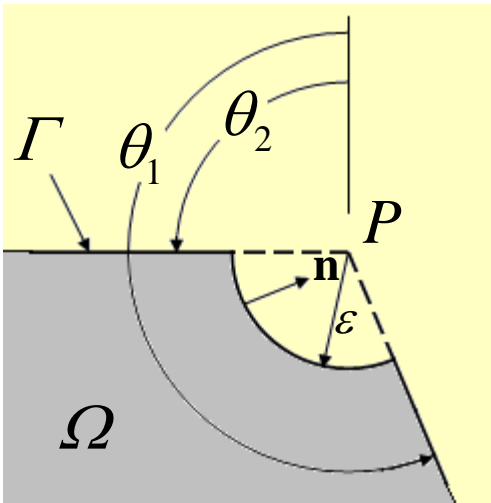
及 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \Gamma_P) = \Gamma$ 综合以上得到



$$C(P)u(P) = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} u(Q) - v(P, Q) \frac{\partial u(Q)}{\partial n} \right) d\Gamma(Q)$$

其中

$$C(P) = \begin{cases} 0, & \forall P \in \bar{\Omega} \\ 1, & \forall P \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & P \text{ is on a smooth portion of } \Gamma \\ \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi}, & P \text{ is at a sharp corner on } \Gamma \end{cases}$$

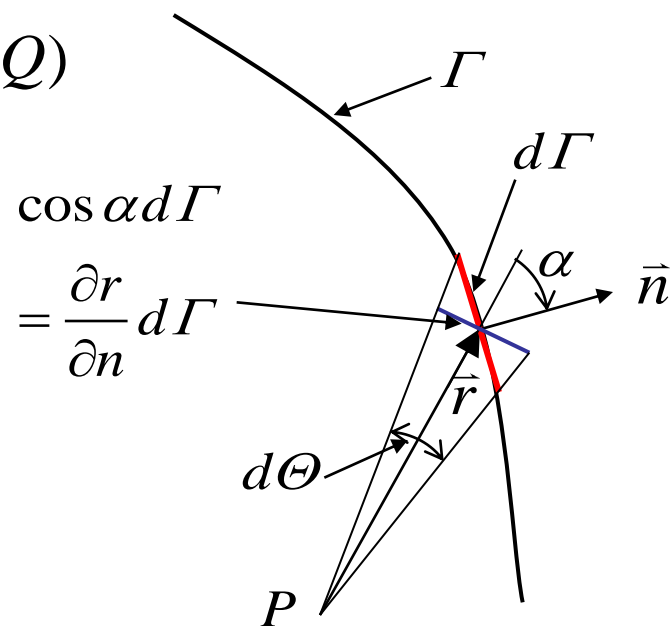
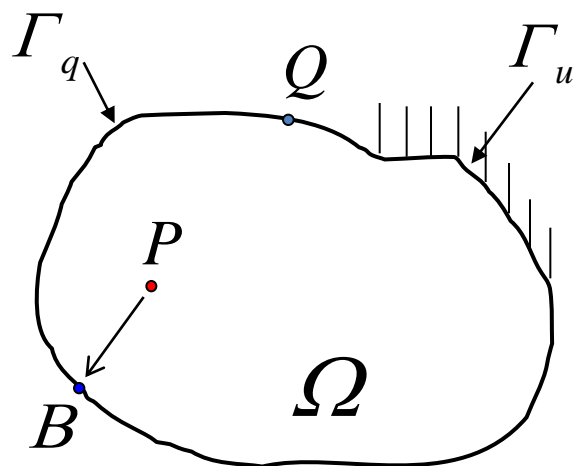


➤ 途径二:

$$u(P) = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} u(Q) - v(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q) \right) d\Gamma(Q), \quad \forall P \in \Omega$$

$$u(P) = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} [u(Q) - u(B)] - v(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q) \right) d\Gamma(Q)$$

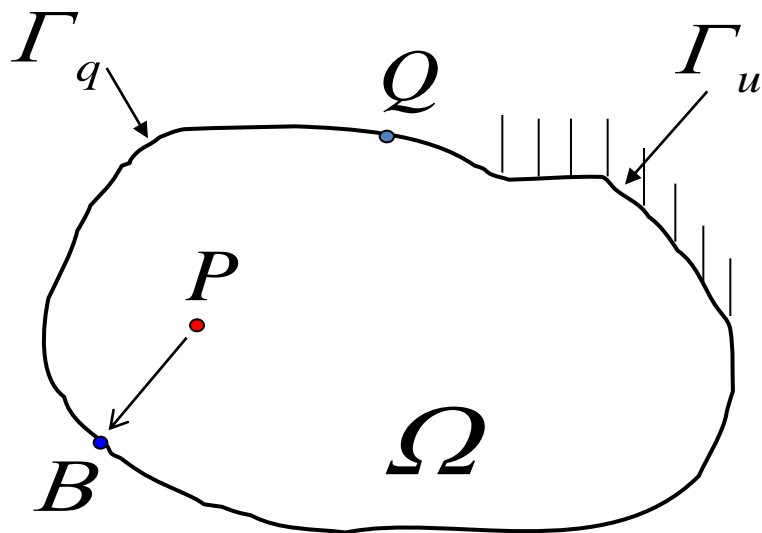
$$+ u(B) \oint_{\Gamma} \frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} d\Gamma(Q)$$



$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} d\Gamma(Q) = \oint_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln r}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\Theta = 1$$

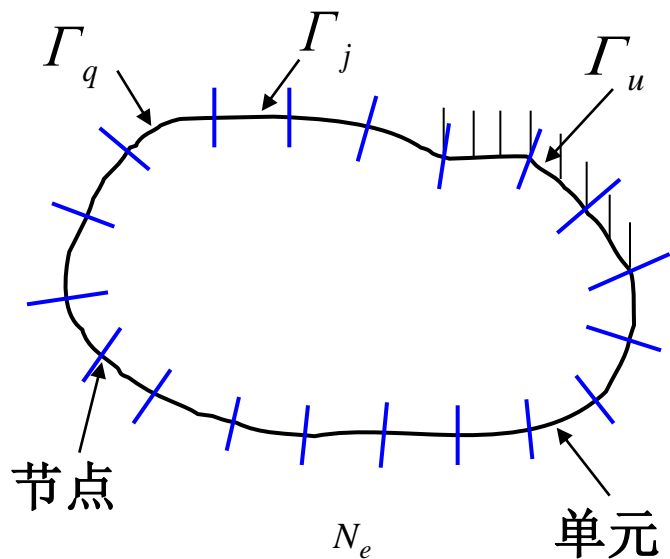
于是得到

$$u(P) - u(B) = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} [u(Q) - u(B)] - v(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q) \right) d\Gamma(Q)$$

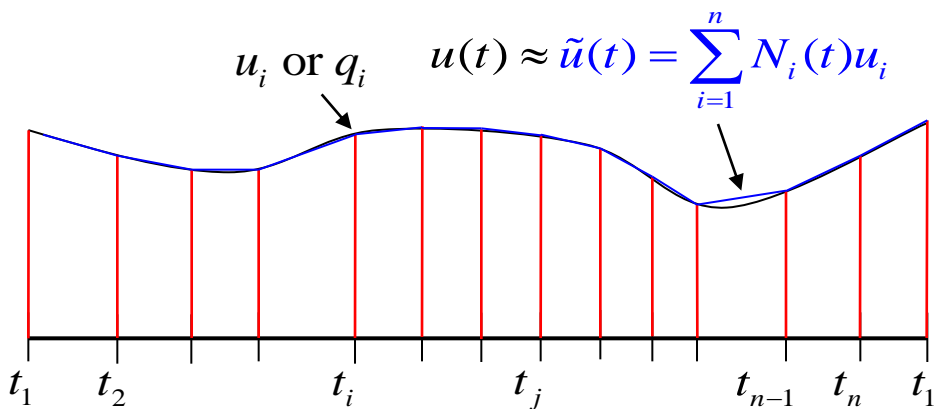
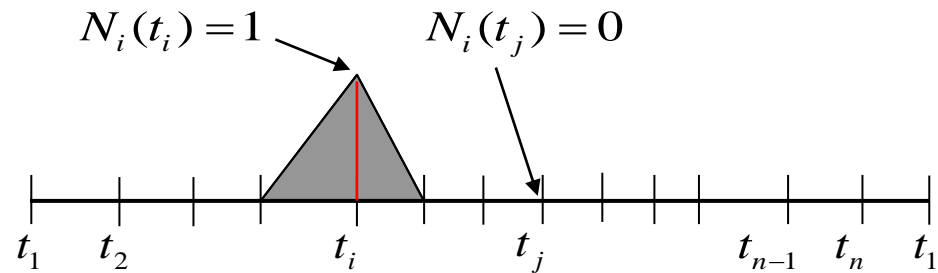


让 P 趋近 B , 得到

$$0 = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} [u(Q) - u(P)] - v(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q) \right) d\Gamma(Q)$$



$$\Gamma = \sum_{k=1}^{N_e} \Gamma_k$$



将未知函数 u 近似为

$$u(t) = \sum_{j=1}^n N_j(t)u_j \quad \frac{\partial u}{\partial n}(t) = q(t) = \sum_{j=1}^n N_j(t)q_j$$

代入方程

$$0 = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} [u(Q) - u(P)] - v(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q) \right) d\Gamma(Q)$$

得到

$$\sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial \ln r(t, P)}{\partial n} \left[\sum_{j=1}^n N_j(t) u_j - u(P) \right] - \ln r(t, P) \sum_{j=1}^n N_j(t) q_j \right) d\Gamma(t) = 0$$

取 P 分别为所有节点 t_i , $i=1,2,\dots,n$, 得到代数方程组

$$(\mathbf{H} - \mathbf{D})\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

其中, \mathbf{D} 是对角矩阵

$$H_{ij} = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \ln r(t, t_i)}{\partial n} N_j(t) d\Gamma(t)$$

$$D_{ii} = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \ln r(t, t_i)}{\partial n} d\Gamma(t)$$

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_k} \ln r(t, t_i) N_j(t) d\Gamma(t)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}$$

对任意节点，要么 u_k 已知，要么 q_k 已知。将已知量乘以矩阵相应的列，并移到方程的右边，得到

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

其中， \mathbf{x} 由未知的 u_k 和 q_k 组成。解出此方程就可以得到所有未知边界未知量。

再利用积分方程

$$u(P) = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial \ln r(t, P)}{\partial n} \sum_{j=1}^n N_j(t) u_j - \ln r(t, P) \sum_{j=1}^n N_j(t) q_j \right) d\Gamma(t)$$

可求得域内任意点的函数值。

边界积分方程赞

解名基本体名空①
流势对称造化功②
究极探幽源奇异③
说强论弱理圆融④
微分转积承天运⑤
体积化边去人工⑥
热力电声皆可解⑦
能将有限事无穷⑧

注:

- ①基本解是物理定律（万有引力、库伦力等）在位势理论中的表达式。通过基本解，边界变量可以完全确定物体内部状态。对线性问题，求解方程不需要考虑内域。
- ②边界积分方程中势和流是对称对等的，因而应力计算精度高。在接触问题中施加平衡条件时，面力也是现成的。
- ③基本解的奇异性使得系统代数方程组的系数矩阵绝对占优，保证了数值计算的稳定性。
- ④由于基本解的散度是 Δ 函数，边界积分方程是强形式，但对试函数的连续性要求比弱形式还要低。
- ⑤由弱形式推导边界积分方程时用了两次散度定理，而散度定理是物质和能量守恒的数学形式。边界积分方程与原微分方程完全等价，弱形式方程则是一种近似。
- ⑥体积分转化为边界积分的过程中除了使用散度定理，没有引入任何人为假设。
- ⑦对线性问题，不需要域内积分。对非线性问题，加上域积分即可。积分计算比微分更稳定，精度更高，且不要求网格连续。
- ⑧对电磁波，声场，地震波等涉及无限域的问题，边界积分方程自动满足无穷远处的边界条件，无需考虑外域无限空间，只需物体表面网格。